Université de Brest

UFR Droit, Economie, Gestion, AES

Cours de mathématiques

S2 Licence AES

2015-2016

Chargé de cours et de travaux dirigés: Julien Hay

julien.hay@univ-brest.fr, Bureau B011 Ter.

CHAPITRE UN

Chapitre 1 - Quelques notions de base

Section 1 - L'ensemble des nombres réels et ses sous-ensembles

1.1. Présentation des nombres réels

Les mathématiques obligent souvent à manipuler des nombres, par exemple afin de réaliser des calculs ou lorsque l'on cherche à résoudre des équations. Les nombres les plus fréquemment utilisés sont les **nombres réels**, c'est-à-dire **les nombres qui peuvent être représentés par une partie entière (située avant la virgule), éventuellement suivie par une liste finie ou infinie de décimales (aussi appelées « chiffres après la virgule »)**.

Il existe une infinité de nombres réels, et l'on écrit cet **ensemble** infini $\mathbb{R}$. Ainsi, $-\frac{3}{4}$; π; 1,25; $-\sqrt{\pi}$; 3,5 et 4 sont tous des nombres réels. On peut dire de chacun qu'ils appartiennent à l'ensemble des nombres réels en écrivant (en prenant le nombre 4 pour exemple), $4 \in \mathbb{R}$. Cela se lit « le nombre 4 appartient à l'ensemble des nombres réels », ce qui revient au même de dire que 4 est un nombre réel.

Graphiquement, il est possible de représenter tous les nombres réels en les alignant le long d'une ligne horizontale, qui s'étendrait sur sa gauche vers « moins l'infini » et sur sa droite vers « plus l'infini », en passant par un point particulier, servant d'origine, le point 0 (Cf. Figure 1).

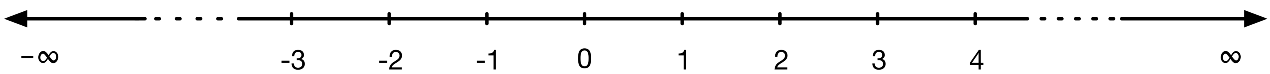

Figure 1. La ligne des nombres réels

Cette possibilité traduit une propriété intéressante des nombres réels, à savoir qu'ils peuvent être comparés entre eux et classés du plus petit au plus grand. En positionnant les différents nombres réels mentionnés précédemment le long de la droite, on obtient la représentation suivante, de laquelle on déduit $-\sqrt{\pi} < -\frac{3}{4} < 1{,}25 < \pi < 3{,}5 < 4$ (Cf. Figure 2).

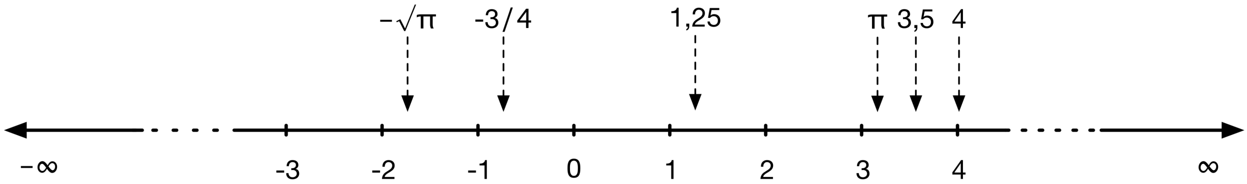

Figure 2. Positionnement et classeement des nombres réels

1.2. Les différentes catégories de nombres réels

Il est possible de distinguer parmi tous les nombres réels différentes catégories, qui constituent chacune un sous-ensemble.

1.2.1. Les nombres réels positifs ($\mathbb{R}_+$) et négatifs ($\mathbb{R}_-$)

Première distinction: les nombres réels peuvent être positifs ou négatifs. On appelle $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres **réels positifs**, c'est-à-dire situés à droite de la graduation 0. De la même manière, on appelle $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres **réels négatifs**, c'est-à-dire situés à gauche de la graduation 0.

Le nombre zéro, c'est-à-dire la valeur nulle, occupe une place particulière car c'est par rapport à elle que l'on distingue un nombre réel positif d'un nombre réel négatif. Quelque chose qui est plus petit que 0 est négatif tandis que quelque chose qui est plus grand que 0 est positif. En réalité, $\mathbb{R}_+$ comprend l'ensemble des réels positifs, zéro inclus De même, $\mathbb{R}_-$ comprend l'ensemble des réels négatifs, zéro inclus. Si l'on veut se référer à l'ensemble des réels positifs non nuls, appelés **réels strictement positifs**, on écrira $\mathbb{R}_+^*$ (que l'on prononce « R plus étoile »), l'ajout de l'exposant étoile signifiant que l'on exclut la valeur nulle de l'ensemble des réels positifs. De manière analogue, si l'on veut se référer à l'ensemble des réels négatifs non nuls, appelés **réels strictement négatifs**, on écrira $\mathbb{R}_-^*$ (que l'on prononce « R moins étoile »).

1.2.2. Les nombres réels entiers

Deuxième distinction: les nombres réels peuvent être **entiers** (par exemple le nombre 4) ou non (dans ce dernier cas, ils ont un nombre plus ou moins important de chiffres après la virgule, que l'on appelle développement décimal, à l'exemple de 1,25 ou de π).

Parmi les nombres entiers, on distingue d'abord l'ensemble des « **entiers naturels** », que l'on note $\mathbb{N}$, et qui contient tous les nombres entiers positifs. C'est l'ensemble de nombre que récite tout enfant lorsqu'il apprend à compter.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$$

Cet ensemble, qui débute à zéro, n'a pas de fin (d'où les trois petits points avant l'accolade de droite), puisque l'on peut associer à tout entier positif un autre entier positif d'une valeur supérieure (par exemple en lui ajoutant une unité).

Il y a également l'ensemble des « **entiers relatifs** », que l'on note $\mathbb{Z}$. Cet ensemble rassemble tous les nombres entiers, positifs comme négatifs.

$$\mathbb{Z} = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$$

Cet ensemble comporte un nombre infini d'éléments, puisqu'il va de $-\infty$ (« moins l'infini ») à $+\infty$ (« plus l'infini »). On comprend en comparant $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ que tous les entiers naturels sont également des entiers relatifs. La propriété inverse n'est toutefois pas valide (-2, comme tous les autres nombres entiers négatifs, appartient bien à $\mathbb{Z}$ mais n'appartient pas à $\mathbb{N}$).

1.2.3. Les nombres décimaux, rationnels et irrationnels

Lorsqu'un nombre n'est pas entier, c'est-à-dire lorsqu'il a un développement décimal (ou pour le dire encore autrement lorsqu'il y a des chiffres autres que zéro à droite de la virgule qui le compose), on distingue s'il y a un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule.

Un nombre qui compte un nombre fini de chiffres après la virgule (comme par exemple 1,25 ou -3,4 ou même 1,23456) est appelé **nombre réel décimal**. L'ensemble des nombres décimaux[1] s'écrit $\mathbb{D}$.

Enfin, on distingue les **nombres réels rationnels** des **nombres réels irrationnels**.

Un nombre rationnel désigne tout nombre réel que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$, p étant un nombre **entier** et q un nombre **entier non nul**. L'ensemble des nombres rationnels s'écrit $\mathbb{Q}$.

A y regarder de plus près, l'ensemble des nombres réels rationnels est très vaste et englobe l'ensemble des nombres réels entiers relatifs[2] ainsi que les nombres réels décimaux[3]. Il englobe aussi des nombres réels qui ne sont ni

[1] Les nombres décimaux ont la particularité de pouvoir s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

[2] Prenons l'exemple du nombre -3, on peut l'écrire comme le résultat du quotient de deux entiers réels (-6 divisé par 2, par exemple, ou 3 divisé par -1).

[3] 1,25 n'est autre que le quotient de 5 divisé par 4. De même, 1,234 peut s'obtenir en divisant l'entier 1234 par l'autre nombre entier 1000.

entiers, ni décimaux, comme $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{7}$, qui comptent un nombre infini de décimales après la virgule[4].

Les **nombres irrationnels** sont des nombres qui comptent un nombre infini de chiffres après la virgule et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$. Le plus connu d'entre-eux est certainement le nombre π, utile en géométrie pour calculer la circonférence et la surface d'un cercle[5]. On rencontre aussi pas mal de nombres irrationnels parmi les racines carrées des nombres entiers naturels, comme par exemple $\sqrt{2}$.

1.2.4. Synthèse des sous-ensembles constitutifs des nombres réels

Au final, la figure 3 synthétise les différents types de nombres réels qui existent et leur agencement. Ainsi, comme nous l'avons vu, $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, lequel est inclus dans $\mathbb{Q}$, puisque chaque entier est nécessairement un nombre rationnel.

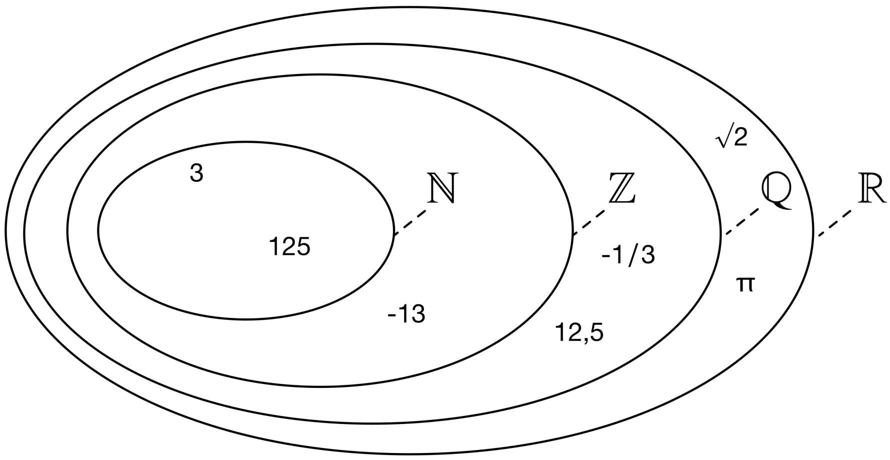

Figure 3. Représentation graphique des différents ensembles constitutifs des nombres réels.

[4] En effet, on vérifie $\frac{1}{3} = 0{,}333333333333333333.......$

[5] $\pi = 3{,}14159265359....$

Section 2 - Les intervalles

2.1. Présentation des intervalles

La notion d'intervalle est utile lorsque l'on raisonne avec des nombres réels. On peut parfois, dans un calcul ou une démonstration, considérer non pas l'ensemble des nombres réels mais seulement une partie d'entre-eux. La notion d'intervalle permet alors de préciser les nombres réels qui nous intéressent, en recourant à des crochets.

Par exemple, l'intervalle [-2;17] regroupe tous les nombres réels supérieurs ou égaux à -2 et inférieurs ou égaux à 17. Cet intervalle comprend à la fois des nombres entiers (par exemple -1 et 13), des nombres décimaux (12,5), des nombres rationnels (2/3) ainsi que des nombres irrationnels ($\sqrt{7}$).

Notons que la manière dont on inscrit les crochets, en les ouvrant ou les fermant, importe. Ainsi, l'intervalle qui s'écrit]-2;17[signifie l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à -2 et strictement inférieurs ou égaux à 17. Il a donc un sens légèrement différent de l'intervalle [-2;17], qui inclut à la fois les nombres réels -2 et 17.

2.2. Les intervalles bornés

On distingue les intervalles selon qu'ils sont bornés ou non. Les **intervalles bornés** ont pour extrémités (limites inférieure et supérieures) **deux** nombres réels a et b (en supposant $a<b$) et sont définis de la manière suivante:

Intervalle borné fermé (les bornes sont incluses dans l'intervalle):

$[a;b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x compris entre les bornes a et b, ces bornes étant incluses dans l'intervalle.

Exemple: si l'on veut considérer tous les nombres réels compris entre 2 et 3, 2 et 3 étant inclus, on écrit [2;3].

Intervalle borné ouvert (les bornes sont exclues de l'intervalle):

$]a;b[=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x compris entre les bornes a et b, ces bornes étant exclues dans l'intervalle (pour le dire autrement, l'ensemble des réels strictement supérieurs à a et strictement inférieurs à b).

Exemple: si l'on veut considérer tous les nombres réels strictement supérieurs à 2 et strictement inférieurs à 3, on écrit]2;3[.

Intervalles bornés mixtes ou semi-ouverts (une borne est incluse, l'autre est exclue)

On a ici deux cas de figures possibles:

- Cas de figure 1: $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x strictement supérieurs à a et inférieurs ou égaux à b.
- Cas de figure 2: $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x supérieurs ou égaux à a et strictement inférieurs à b.

Exemple: si l'on veut considérer tous les nombres strictement supérieurs à 2 et inférieurs à 3, 3 étant inclus, on écrit]2;3].

Graphiquement, les intervalles bornés peuvent être interprétés à la manière de la figure 4.

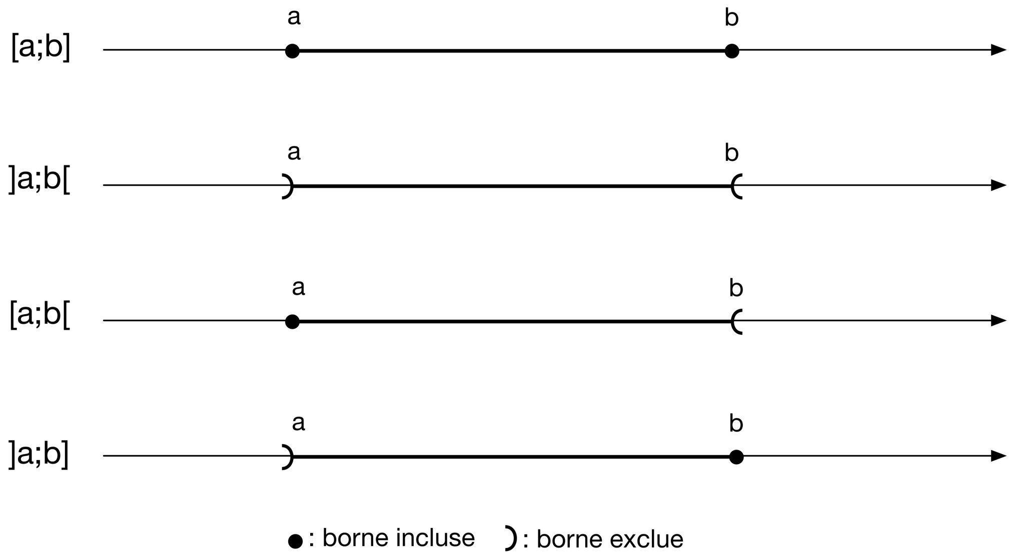

Figure 4. Représentation graphique des intervalles bornés

2.3. Les intervalles non bornés

Les **intervalles non-bornés** n'ont soit pas de limite inférieure (on peut « descendre » jusqu'à $-\infty$), soit pas de limite supérieure (on peut « monter » jusqu'à $+\infty$). On observe que dans le cas d'un intervalle non borné, le crochet qui se rapporte à la borne infinie est toujours ouvert.

Si on prend le nombre réel a, on peut définir les intervalles non bornés suivants:

Intervalles non bornés fermés (la borne a est incluse dans l'intervalle):

- Cas de figure 1: $[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}:x\geq a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a.

- Cas de figure 2: $]-\infty;a]=\{x\in\mathbb{R}:x\leq a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à a.

Exemple: si l'on veut considérer tous les nombres réels supérieurs ou égal à -1, on écrit [-1;+∞[. A l'inverse, si l'on veut considérer tous les nombres réels inférieurs ou égal à -1 (c'est-à-dire situés à gauche de -1 le long de la droite de la figure 1), on écrit]-∞;-1].

Intervalles non bornés ouverts (la borne a est exclue dans l'intervalle):

- Cas de figure 1: $]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}:x>a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à a.

- Cas de figure 2: $]-\infty;a[=\{x\in\mathbb{R}:x<a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels strictement inférieurs à a.

Exemple: si l'on veut considérer tous les nombres réels strictement supérieurs à 1, on écrit]1;+∞[

Graphiquement, les intervalles non bornés peuvent être interprétés à la manière de la figure 5.

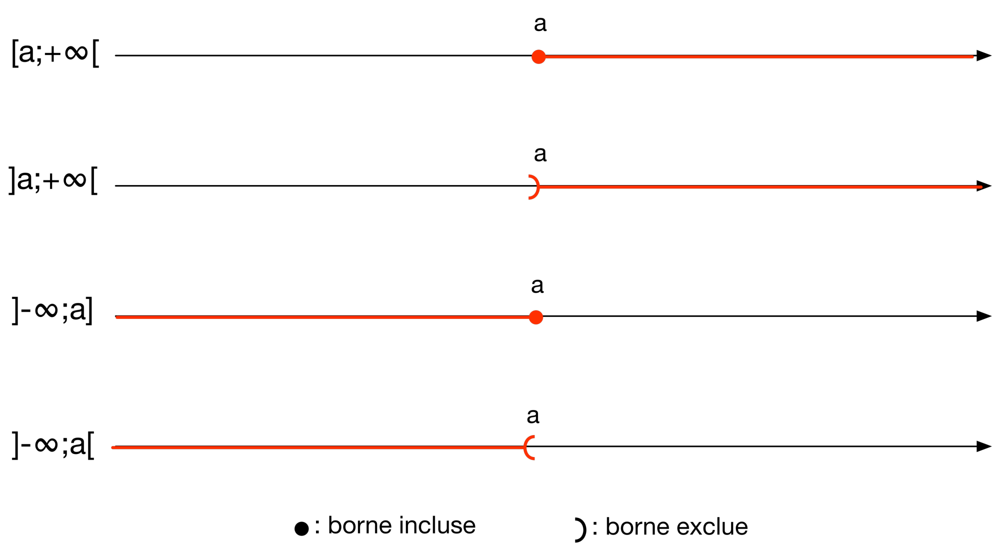

Figure 5. Représentation graphique des intervalles non bornés

Section 3 - Quelques propriétés de calcul dans $\mathbb{R}$

Le calcul au moyen des nombres réels obéit à quelques propriétés qu'il est utile de rappeler et nécessaire de maîtriser.

3.1. Addition

Pour l'addition dans $\mathbb{R}$:

- Associativité: pour tous réels a, b et c : $a+(b+c)=(a+b)+c$;
- Commutativité: pour tous réels a et b : $a+b=b+a$;
- 0 est l'élément neutre;
- Tout réel b a un opposé noté (-b);
- Si b est un réel positif, alors (-b), son opposé, est de signe négatif (par exemple, l'opposé de 2 est -2);
- Si b est un réel négatif, alors (-b), son opposé, est de signe positif (par exemple, l'opposé de -17 est 17);
- Retrancher un réel, c'est ajouter son opposé: $a-b=a+(-b)$;
- $-(a+b)=-a-b$;
- $-(a-b)=-a+b=b-a$.

3.2. Multiplication

Pour la multiplication dans $\mathbb{R}$:

- Associativité: pour tous réels a, b et c : $a(bc)=(ab)c$;
- Commutativité: pour tous réels a et b : $ab=ba$;
- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition: pour tous réels a, b et c, $a(b+c)=ab+ac$;
- 1 est l'élément neutre;
- Tout réel **non nul** b a un inverse noté $\frac{1}{b}$;
- Diviser par un réel non nul, c'est multiplier par son inverse: $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ avec $b\neq 0$;
- $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$;
- $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

3.3. La division

Pour les quotients:

- Le quotient d'un réel a par un réel non nul b est le réel noté $\frac{a}{b}$ défini par $\frac{a}{b}\times b=a$;
- Pour tous réels a et c, pour tous réels non nuls b,d et k:

  - $\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$;
  - $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;
  - $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$;
  - $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$;
  - $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$.

-

3.4. Rôle de 0

- Dans la multiplication:
  - Pour tout réel a: $a\times 0=0$;
  - Pour tout réel a et b: si $ab=0$ alors $a=0$ ou $b=0$

- Dans la division:
  - Pour tout réel b non nul: $\frac{0}{b}=0$;
  - Pour tous réels a et b (b non nul): si $\frac{a}{b}=0$ alors $a=0$;
  - Le quotient d'un réel par 0 n'existe pas (autrement dit: la division par 0 est impossible).

3.5. Identités remarquables:

- Pour tous réels a et b:
  - $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

3.6. Relation d'ordre:

- Pour tous réels a, b et c:
  - Si $a \geq b$ alors $a - b \geq 0$;
  - Si $a \geq b$ et $b \geq c$ alors $a \geq c$;
  - Si $a \geq b$ alors $a + c \geq b + c$;
  - Si $c > 0$, $a \geq b$ implique que $ac \geq bc$;
  - Si $c < 0$, $a \geq b$ implique que $ac \leq bc$.

3.7. Valeur absolue:

- Soit un réel a. La valeur absolue de a est le réel **positif** noté $|a|$ et défini par:
  - Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$;
  - Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$
  - Par exemple, la valeur absolue de 2 est 2 tandis que celle de -3 est 3.
- Pour tous réels a et b:
  - $|-a| = |a|$: Un nombre réel et son opposé ont la même valeur absolue;
  - $|ab| = |a| \times |b|$: La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues.

3.8. Puissances:

La puissance consiste à multiplier un nombre réel plusieurs fois par lui-même. Par exemple, multiplier 4 fois le nombre 3 par lui-même revient à calculer $3 \times 3 \times 3 \times 3$.

On distingue les puissances entières des puissances fractionnaires. Les **puissances entières** consistent à multiplier un nombre réel par lui-même **un nombre entier de fois** (par exemple 2 fois, 17 fois, 267 fois, ou n fois, tant que $n \in \mathbb{Z}$). Les puissances fractionnaires consistent pour leur part à multiplier un nombre réel par lui même **un nombre de fois qui n'est pas entier**, par exemple 0,8 fois ou 1,13 fois, **mais qui est rationnel** (de type $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers et $q \neq 0$, conformément à ce que l'on a vu dans la section 1, sous réserve que $\frac{p}{q}$ ne soit pas un nombre entier).

3.8.1. Puissances entières (forme a^n, avec l'exposant n étant un nombre réel entier).

Précision importante : on peut calculer la puissance entière de tout nombre réel, positif comme négatif.

- Pour tout réel non nul a, pour tout entier naturel n:
  - $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geq 2$: Cela signifie multiplier n fois le nombre réel a par lui-même.
  - Par convention, on pose $a^1 = a$ et $a^0 = 1$;
  - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Pour tous réels non nuls a et b, pour tous entiers n et p:
  - $a^n \times a^p = a^{n+p}$ et $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$;
  - $a^n \times b^n = (ab)^n$ et $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$;
  - $(a^n)^p = a^{np}$.

3.8.2. Puissances fractionnaires (forme a^n, avec l'exposant n étant un nombre réel rationnel non entier)

Précision importante : à la différence des puissances entières, on ne peut pas calculer la puissance fractionnaire d'un nombre réel négatif. Les puissances fractionnaires ne s'appliquent qu'aux nombres réels positifs voire nul.

- Les règles de calcul pour les puissances entières restent valides pour des exposants rationnels. Pour le dire autrement, les règles de calcul pour les puissances entières valent également pour les puissances fractionnaires.

- Notons que lorsque l'exposant rationnel est de type $\frac{1}{q}$, q étant un entier non nul, on appelle $a^{\frac{1}{q}}$ la racine q-ième de a, que l'on peut écrire également $\sqrt[q]{a}$.

  - Par exemple, $a^{0,01} = a^{\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{a}$.

3.9. Racine carrée:

Précision 1 - Une racine carrée est forcément positive, voire nulle, mais jamais négative.

Précision 2 - De plus, on ne peut calculer de racine carrée que pour les réels positifs ou nuls. La racine carrée d'un réel négatif n'existe pas (par exemple $\sqrt{-2}$ n'existe pas).

Précision 3 - La racine carrée de a s'écrit également $a^{\frac{1}{2}}$. La racine carrée n'est en fait qu'une puissance fractionnaire particulière de a, celle à la puissance « un demi » ou « un sur deux ».

- Soit un réel positif a :
  - La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le réel **positif** qui a pour carré a ;
- Pour tous réels positifs a et b :
  - $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
  - $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour b non nul.
-

3.10. Priorité des opérations

- Lorsqu'une expression contient plusieurs opérations, celles-ci doivent être effectuées suivant l'ordre de priorité suivant:
  - Elevation à la puissance
  - Multiplication et division
  - Addition et soustraction

- Si deux opérations de même priorité se suivent, elles sont exécutées de gauche à droite.

- Les parenthèses/crochets ont priorité sur toutes les opérations, elles indiquent les opérations à effectuer en premier lieu.

- Lorsque des parenthèses/crochets sont emboitées, les parenthèses/crochets les plus internes sont prioritaires.

Section 4 - Quelques éléments de calcul algébrique

4.1. Précisions quant au calcul algébrique

On distingue le calcul algébrique du calcul numérique. Le calcul numérique consiste à appliquer des règles de calcul de base, que l'on a rappelées dans la section 3, sur des nombres réels dont la valeur est donnée en tant que telle. C'est le type de calcul que l'on enseigne dès l'école primaire, comme par exemple demander de réaliser l'opération $2\times\frac{4}{7}\times\left(8-\frac{9}{2}\right)$ et de trouver que le résultat vaut 4.

Le calcul algébrique (également appelé calcul littéral) consiste également à appliquer les règles de calcul de base à des nombres réels, mais sans toutefois que l'on connaisse leur valeur précise. Ces nombres sont remplacés par des lettres, que l'on appelle variables inconnues. C'est souvent l'emploi de ces variables qui déroute les étudiants, lesquels les trouvent mystérieuses, abstraites faute de voire clairement de quoi il s'agit.

Le calcul algébrique nécessite de recourir à des expressions algébriques, qui précisent une série d'opérations appliquées à des nombres réels dont on ne connait pas la valeur.

Ainsi, l'expression algébrique $2x+y-5$ consiste (1) à multiplier par 2 la valeur d'un nombre réel appelé x, (2) ajouter ensuite la valeur d'un autre nombre réel appelé y et (3) retirer 5 de ce calcul. Si x vaut 6 et y vaut 3, alors l'expression algébrique prend la valeur $2\times6+3-5$ soit 10.

En dépit de l'usage de variables (au lieu de nombres précis), le calcul algébrique n'est pas plus compliqué que le calcul numérique, puisqu'il obéit aux mêmes règles que celles présentées à la section 1. Le calcul algébrique est utilisé en particulier lorsque l'on a à faire à des équations ou pour l'étude de fonctions. Il ne doit pas faire peur et implique d'être attentif et rigoureux dans l'application des règles entrevues précédemment, sans quoi on réalise des erreurs de manipulation avec les variables, et donc des erreurs de résolution.

4.2. Signes sommatoire, multiplicatif et factoriel

Le calcul algébrique mobilise souvent des symboles qui effraient à première vue mais sont pourtant très utiles pour synthétiser les calculs à réaliser. Nous verrons ici les signes sommatoire, multiplicatif et factoriel, fréquemment utilisés en mathématiques, en statistiques, en probabilités comme en économie.

4.2.1. Le signe sommatoire

Le **signe sommatoire**, $\sum$ (lettre grecque que l'on prononce sigma), est utile pour exprimer la somme d'un ensemble de termes que l'on additionne les uns aux autres. Il s'utilise de différentes façons[6].

La plus fréquente, en mathématiques, consiste à faire augmenter d'une unité la valeur d'un indice entier naturel, souvent appelé i, dans l'expression algébrique que prend chaque terme successif de la somme.

Par exemple, si l'on veut écrire la somme de tous les nombres entiers naturels compris entre 10 et 500, on peut écrire $10+11+12+13+...+497+498+499+500$ mais cette solution est fastidieuse et pénible.

Une autre solution, plus courte, consiste à écrire $\sum_{i=10}^{500} i$, qui signifie « sommer les nombres entiers naturels, appelés i, compris entre 10 (inclus) et 500 (inclus) ».

Autre exemple, $\sum_{i=3}^{6}(20+3i)$ est la somme des quatre valeurs que prend l'expression algébrique $20+3i$ pour i valant successivement 3, 4, 5 et 6.

Ainsi,

$$\sum_{i=3}^{6}(20+3i)=(20+3\times 3)+(20+3\times 4)+(20+3\times 5)+(20+3\times 6)=29+32+35+38=134$$

4.2.2. Le signe multiplication

Lorsque l'on veut multiplier un ensemble de termes successifs d'une même expression algébrique, on a recours au **signe multiplication** Π (lettre grecque que l'on prononce Pi).

Par exemple, si l'on veut écrire le produit de tous les nombres entiers naturels compris entre 10 et 20, on peut écrire:

- Solution 1: $10\times 11\times 12\times 13\times 14\times 15\times 16\times 17\times 18\times 19\times 20$, mais c'est pénible.
- Solution 2: $\prod_{i=10}^{20} i$

Plus courte, la solution 2 consiste à dire « faire la somme des entiers naturels compris entre 10, inclus, et 20, inclus également ».

[6] Se référer par exemple à certaines formules vues dans le cadre du cours de statistiques descriptives du premier semestre.

Autre exemple: $\prod_{i=1}^{4}(20+3i)$ est la somme des quatre valeurs que prend l'expression algébrique $20+3i$ pour i valant successivement 1, 2, 3 et 4.

Ainsi, $\prod_{i=1}^{4}=(20+3\times1)\times(20+3\times2)\times(20+3\times3)\times(20+3\times4)=23\times26\times29\times32$, soit 554944.

4.2.3. Le signe factoriel

Enfin, le signe **factoriel** ! (point d'exclamation) est utilisé avec un entier naturel n pour désigner le produit de l'ensemble des entiers naturels strictement positifs et inférieurs ou égaux à n.

$$n!=1\times2\times3\times...\times(n-1)\times n \text{ avec } n\in\mathbb{N}$$

Par convention, on a $0!=1$

Exemple: $6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$

4.3. Généralités sur les équations

Une équation se définit à la base comme une égalité entre deux expressions algébriques (tout nombre réel peut être considéré comme une expression algébrique), contenant une ou plusieurs variables inconnues, et qui est vérifiée pour une ou plusieurs valeurs des inconnues.

Exemples:

- $2x+3=0$ est une équation à une inconnue (la variable x);
- $y+4x=7$ est une équation à deux inconnues (les variables x et y);
- $x^2-3xy+52=z+3$ est une équation à trois inconnues (les variables x, y et z), un peu plus complexe que les deux précédentes;
- En revanche, $2x+4$ n'est pas une équation, puisqu'il n'y a pas d'égalité, mais seulement une expression algébrique à une seule inconnue (la variable x).

Résoudre une équation consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par les inconnues pour que l'égalité sur laquelle repose l'équation soit vérifiée. Ces valeurs sont également appelées les racines de l'équation.

Exemple: $2x+3=0$ est vérifiée pour $x=-1{,}5$;

Nous ne nous intéresserons dans ce chapitre qu'aux équations à une ou deux inconnues (les fameuses variables x et y), laissant pour la suite les équations qui en comptent davantage.

4.4. Equations, inéquations, systèmes du premier degré

Le traitement de très nombreux problèmes passe par la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes du premier degré, à une ou plusieurs inconnues. Leur maîtrise est donc essentielle.

4.4.1. Equation du premier degré à une inconnue:

Une équation d'inconnue x du premier degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme équivalente $ax+b=0$, a et b étant des nombres réels avec a non nul. Cette équation n'admet qu'une solution, qui se calcule $x=-\frac{b}{a}$.

Exemple: l'équation d'inconnue x $2x=-3$ est une équation du premier degré puisqu'elle peut se réécrire $2x+3=0$. Sa racine est $-\frac{3}{2}$, soit -1,5.

4.4.2. Inéquation du premier degré à une inconnue

Résoudre une inéquation d'inconnue x consiste à trouver tous les nombres réels qui, substitués à x, vérifient l'inégalité étudiée. Pour résoudre une inéquation du premier degré, on transforme d'abord l'inéquation proposée en une inéquation équivalente de la forme:

$$ax+b<0; \quad ax+b\le 0; \quad ax+b>0 \text{ ou } ax+b\ge 0$$

a et b étant des nombres réels avec a non nul.

On étudie ensuite cette inéquation.

Exemple: l'inéquation d'inconnue x $4x-1\le 2x+3$ se transforme, en passant tous les éléments à gauche du signe d'inégalité, en l'inéquation équivalente $2x-4\le 0$. En passant la constante « -4 » à droite (en prenant soin de changer son signe), puis en divisant par 2 de part et d'autre, cette dernière inégalité se simplifie en $x\le 2$.

On en déduit que l'inéquation de départ, $4x-1\le 2x+3$, est vérifiée pour toute valeur de x inférieure ou égale à 2. La solution est donc l'intervalle $]-\infty;2]$.

4.4.3. Equation du premier degré à deux inconnues, x et y

Une équation du premier degré à deux inconnues peut s'écrire sous la forme équivalente $ax+by+c=0$, a, b et c étant des nombres réels avec a et b non nuls.

Résoudre une équation à deux inconnues consiste à trouver toutes les combinaisons (paires, couples) de valeurs que peuvent prendre les deux variables et qui vérifient l'égalité.

Lorsque a et b sont non nuls, il n'est pas possible d'aboutir à une solution unique[7], comme pour le cas d'une équation à une inconnue. Le mieux que l'on puisse faire ici - et c'est déjà pas mal - est d'exprimer une inconnue (par exemple y) par rapport à l'autre (en l'espèce x). Plus particulièrement, on aboutit à un ensemble de solutions, infini, de tous les couples $(x;y)$ vérifiant l'équation $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, qui s'écrit également $y=-\frac{(ax+c)}{b}$.

Cet ensemble de combinaisons se représente graphiquement dans un plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ par l'ensemble des points de la droite dont l'équation cartésienne est $ax+by+c=0$. Cette droite coupe l'axe des ordonnées (l'axe vertical) à la valeur $-\frac{c}{b}$ et a pour pente la valeur $-\frac{a}{b}$.

Exemple: Résoudre l'équation du premier degré à deux inconnues $5x-y+4=2y-x-5$.

En passant à gauche tous les éléments à droite de l'égalité, on obtient la forme équivalente $6x-3y+9=0$, qui permet de vérifier qu'il s'agit bien d'une équation du premier degré. Pour obtenir l'ensemble des solutions, on cherche à exprimer l'inconnue y en fonction de l'inconnue x.

$$\begin{aligned}
&6x-3y+9=0\\
&\Leftrightarrow 6x+9=3y\\
&\Leftrightarrow 2x+3=y\\
&\Leftrightarrow y=2x+3
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est constitué de tous les couples $(x;y)$ vérifiant l'équation $y=2x+3$. Il se représente dans un plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ par l'ensemble des

[7] Par exemple x doit prendre telle valeur, et seulement celle-là, tandis que y doit prendre telle valeur, et seulement celle-là.

points qui constituent la droite dont la pente est égale à 2 et qui coupe l'axe des ordonnées au point $y=3$.

Afin de vérifier ce résultat, il est possible de prendre deux couples $(x;y)$ qui vérifient bien l'équation $y=2x+3$, par exemple $(1;5)$ ou $(0;3)$[8]. On a bien dans le deux cas égalité entre les deux éléments de l'équation initiale, $5x-y+4$ et $2y-x-5$, puisque les deux expressions algébriques valent chacune 4 pour $(1;5)$ et 1 pour $(0;3)$.

4.4.4. Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Un système d'équations du premier degré à deux inconnues (ou système d'équations linéaires à deux inconnues) est un système de deux équations à deux inconnues pouvant s'écrire sous la forme équivalente:

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'x+c'=0 \end{cases}$ avec a, b, c, a', b' et c' des nombres réels et non nuls en ce qui concerne a, b, a' et b'.

Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues revient à chercher les valeurs des inconnues x et y qui sont des racines **des deux équations à la fois**.

A la différence d'une équation linéaire à deux inconnues, pour laquelle il est impossible de trouver une solution unique, mais un ensemble de solution, un système de deux équations linéaires à deux inconnues admet le plus souvent une solution unique.

Pour le comprendre intuitivement, il faut garder en tête que l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues se représentent par une droite dans un plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Résoudre un système de deux équations linéaires à double inconnues consiste à chercher tous les couples $(x;y)$ qui sont à la fois racines de la première équation et racines de la seconde équation. Graphiquement, cela revient à identifier dans l'espace $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les points dont les coordonnées $(x;y)$ sont situés à la fois sur la droite représentant les solutions de la première équation (droite dont l'équation cartésienne est $ax+by+c=0$) et

[8] Il suffit pour cela de prendre une valeur arbitraire de x, et calculer la valeur y correspondante, en appliquant l'équation. Par exemple, prendre $x=1$ donne $y=2\times1+3=5$.

sur la droite représentant les solutions de la seconde équation (droite dont l'équation cartésienne est $a'x+b'y+c'=0$).

Trois cas de figure se présentent alors:

- **Cas 1** - Soit les deux droites ont des pentes différentes (ne sont pas parallèles) et elles se croisent forcément en un point. Les coordonnées de ce point correspondent à la solution du système, cette **solution** étant **unique**.

- Soit les droite ont des pentes égales et sont dans ce cas parallèles. Tout dépend alors si les droites sont confondues ou pas.
  - **Cas 2**: Si les deux droites ne sont pas confondues (elles sont séparées d'un espace), elles ne se coupent jamais et il n'existe donc aucun point commun aux deux. Le système n'a dans ce cas **aucune solution**.
  - **Cas 3**: Si les deux droites sont parallèles et confondues, elles ont alors tous leurs points en commun. Dans ce cas, le système admet une **infinité de solutions**, correspondant à la situation rencontrée lorsque l'on résout une équation du premier degré à deux inconnues.

Il existe différentes techniques de résolution permettant de résoudre un système de deux équations du premier degré à double inconnues. La plus pratique pour cela est certainement la méthode par substitution.

Avant de se lancer dans la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, il est possible de savoir facilement si ce système admet une solution unique ou pas. Il faut pour cela calculer le déterminant D du système, défini par:

$$D=ab'-a'b.$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $D\neq 0$.

Une fois cette précaution prise, on peut se lancer utilement dans la résolution par substitution du système. Cette méthode consiste schématiquement:

- **Etape 1**: A transformer une des deux équations de manière à exprimer l'une des inconnues à l'aide de l'autre inconnue;
- **Etape 2**: A remplacer cette inconnue par son expression dans l'autre équation. En procédant de la sorte, on détermine la valeur précise d'une des deux inconnues;
- **Etape 3**: A calculer la valeur de l'inconnue manquante, en injectant la valeur obtenue à l'étape 2 dans l'expression établie à l'étape 1.

Cela a l'air fastidieux à la lecture, mais c'est beaucoup plus facile à mettre en pratique, comme l'exemple suivant permet de s'en rendre compte.

Exemple: résoudre le système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+2y=5 \end{cases}$

Précaution 1 - Vérifions tout d'abord qu'il s'agit bien d'un système d'équations linéaires à deux inconnues. Pour cela, il faut pouvoir l'exprimer sous une forme équivalente $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'x+c'=0 \end{cases}$.

En passant tous les termes à gauche des opérateurs égalité, on obtient bien une forme de ce type: $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$.

Précaution 2 - Vérifions que ce système admet une solution unique. Pour cela, il faut calculer son déterminant $D=ab'-a'b$. Ici, le déterminant se calcule $D=2\times2-1\times(-1)=4-(-1)=5$. Il n'est pas nul, ce qui signifie que le système admet une solution unique.

Résolution par substitution:

Etape 1 - On réexprime très facilement, à partir de la première équation, la variable y en fonction de la variable x. En effet, si $2x-y=5$, alors $y=2x-5$.

Une fois cette transformation faite, le système peut s'écrire

$$\begin{cases} y=2x-5 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

Etape 2 - Dans la seconde équation, on remplace y par son expression en fonction de x, déterminée à l'étape 1.

$$\begin{cases} y=2x-5 \\ x+2(2x-5)=5 \end{cases}$$

La seconde équation devient alors une équation du premier degré à une seule inconnue, x, facile à résoudre.

$$\begin{cases} y=2x-5 \\ x+2(2x-5)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x+4x-10=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ 5x=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x=3 \end{cases}$$

La solution concernant l'inconnue x vaut donc 3.

Etape 3 - A présent que l'on a trouvé x, il reste à parcourir la seconde moitié du chemin, la plus facile, consistant à trouver y. Pour cela, on remplace dans la première équation du système la variable x par la valeur 3, que l'on vient de déterminer.

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \times 3 - 5 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Nous aboutissons ainsi à la solution unique de ce système, à savoir le couple $(x;y) = (3;1)$.

4.5. Les équations du second degré à une inconnue

Une équation du second degré à inconnue x est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels donnés dont a est non nul.

Trois cas de figure sont possibles en ce qui concerne la résolution d'une équation du second degré:

- **Cas 1** - Il peut n'y avoir **aucune solution** réelle;
- **Cas 2** - Il peut y avoir **une solution** réelle « double »;
- **Cas 3** - Il peut y avoir **deux solutions** réelles différentes.

Résolution:

Pour savoir s'il y a aucune, une ou deux solutions réelles, on calcule un discriminant Δ (on prononce delta), qui vaut $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune racine réelle.

(2) Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine réelle « double », qui se calcule $x = -\dfrac{b}{2a}$. De même l'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ peut se réécrire $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

(3) Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines distinctes. La première se calcule $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et la seconde $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Dans ce cas, l'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ peut se réécrire $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 1 - Résoudre l'équation $4x^2 - x + 3 = 0$

Pour résoudre une équation du second degré, il faut toujours calculer son discriminant Δ afin de voir si elle admet ou non une solution et, le cas échéant, combien.

Ici, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 1 - 48 = -47$. Sa valeur étant négative, on en déduit que l'équation n'admet aucune solution.

Exemple 2 - Résoudre l'équation $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

Dans ce cas, le discriminant vaut $\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$. Sa valeur est positive, l'équation admet deux solutions distinctes. La première se calcule $x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{-4} = \frac{-5-7}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$ tandis que la seconde vaut $x_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{-4} = \frac{-5+7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

L'équation peut se réécrire $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3) = 0$. Cette réécriture permet de vérifier facilement que l'expression algébrique $-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$ prend une valeur nulle lorsque $x = -\frac{1}{2}$ (dans ce cas, $x+\frac{1}{2}$ est nul) ou lorsque $x = 3$ (dans ce cas, $x-3$ est nul).

CHAPITRE UN

Chapitre 2 - Introduction aux fonctions numériques d'une seule variable

L'étude des fonctions numériques d'une variable réelle tient une place particulièrement importante en mathématiques et en économie. Ce chapitre vise tout d'abord à en présenter les notions de base, avant d'aborder des méthodes spécifiques d'étude locale.

Pour une présentation plus approfondie et claire des fonctions numériques, le lecteur intéressé pourra se tourner vers les chapitres 7 et 8 de l'ouvrage Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion[1], rédigé par Jean-François Caulier, publié en 2014 aux éditions De Boeck (collection Ouvertures Economiques), et dont nous nous inspirons en partie.

[1] http://www.deboecksuperieur.com/titres/131749_2/9782804187774-fondements-mathematiques.html

Section 1 - Généralités au sujet de la notion de fonction à une variable

1.1. Définition d'une fonction numérique d'une variable

Une fonction numérique f d'une variable réelle x est un procédé qui permet de faire correspondre à une variable réelle x un nombre réel **unique** y, appelé image de x par f et qui se note $y=f(x)$.

$y=f(x)$ est appelé **image de x par f** tandis que x est appelé **antécédent de y**.

Exemple: La fonction $f(x)=2x+3$ associe au nombre réel $x=3$ le nombre réel $y=f(3)=2\times 3+3=9$. De même, elle associe au nombre réel $x=-1$ le nombre réel $y=f(-1)=2\times(-1)+3=1$, ou encore au nombre réel $x=\pi$ le nombre réel $y=f(\pi)=2\times\pi+3\simeq 9{,}283$.

1.2. Le domaine de définition d'une fonction numérique d'une variable

On associe à toute fonction numérique f un **domaine de définition** (également appelé ensemble de définition)**, noté** D_f, c'est-à-dire un **intervalle de valeurs que peut prendre la variable x et qui ont effectivement une image $f(x)$ par f**.

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction f, on examine les propriétés que doit vérifier un réel x pour que l'on puisse calculer $f(x)$. Il existe parfois des contraintes de calcul que l'on doit prendre en compte, comme par exemple le fait qu'on ne peut pas diviser par zéro, ou qu'on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif.

Exemple 1: la fonction $f(x)=2x+3$ permet d'associer une valeur $y=f(x)$ à n'importe quel réel x. Son domaine de définition D_f est donc l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On écrit dans ce cas $D_f=\mathbb{R}$.

Exemple 2: la fonction $g(x)=\dfrac{1}{2x}$ permet d'associer une valeur $y=g(x)$ dès lors que $2x\neq 0$ (le dénominateur du quotient $\dfrac{1}{2x}$ ne peut pas être nul), c'est-à-dire si $x\neq 0$. Elle permet donc d'associer une valeur $y=g(x)$ pour n'importe quel réel x à l'exception de la valeur $x=0$. Son domaine de définition D_g est donc l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ exception faite de 0, c'est-à-dire $\mathbb{R}^*$. On écrit dans ce cas $D_g=\mathbb{R}^*$.

Exemple 3: la fonction $h(x)=\frac{1}{x+1}$ permet d'associer une valeur $y=h(x)$ dès lors que $x+1\neq 0$ (le dénominateur du quotient $\frac{1}{x+1}$ ne peut pas être nul), c'est-à-dire si $x\neq -1$. Elle permet donc d'associer une valeur $y=g(x)$ pour n'importe quel réel x à l'exception de la valeur $x=-1$. Son ensemble de définition D_g est donc l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ exception faite de -1, que l'on note $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (on lit « l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ privé de la valeur $x\neq -1$. On écrit dans ce cas $D_h=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Exemple 4: la fonction $j(x)=\sqrt{x-2}$ permet d'associer une valeur $y=j(x)$ dès lors que $x-2\geq 0$ (on ne peut déterminer la racine carrée d'un nombre strictement négatif). Elle permet donc d'associer une valeur $j=g(x)$ pour n'importe quel réel x supérieur ou égal à 2. Son domaine de définition D_j est donc l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 2, c'est-à-dire $[2;+\infty[$. On écrit dans ce cas $D_j=[2;+\infty[$.

Exemple 5: la fonction $k(x)=\sqrt{|x|}$ permet d'associer une valeur $y=k(x)$ dès lors que $|x|\geq 0$ (on ne peut déterminer la racine carrée d'un nombre strictement négatif). Or par définition, on sait que $|x|\geq 0$ quel que soit la valeur du réel x (cf. Les propriétés de la valeur absolue). Son ensemble de définition D_k est donc l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On écrit dans ce cas $D_k=\mathbb{R}$.

Exemple 6: la fonction $m(x)=\sqrt{-|x|}$ permet d'associer une valeur $y=m(x)$ dès lors que $-|x|\geq 0$ (on ne peut déterminer la racine carrée d'un nombre strictement négatif). Or par définition, on sait que $|x|\geq 0$ quelle que soit la valeur du réel x (cf. Les propriétés de la valeur absolue), donc on a nécessairement $-|x|\leq 0$. On ne peut donc pas trouver de valeur pour le réel x qui vérifie la condition $-|x|\geq 0$. Le domaine de définition D_m est donc vide. On écrit dans ce cas $D_m=\varnothing$.

1.3. Représentation graphique d'une fonction numérique f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

La représentation graphique de la fonction f dans le repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$. Cette représentation graphique est aussi appelée **courbe représentative de** f **ou courbe d'équation** $y = f(x)$**, ou encore graphe de la fonction** f, et notée C_f.

Exemple 1: La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{3}$, définie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $D_f = \mathbb{R}$), est

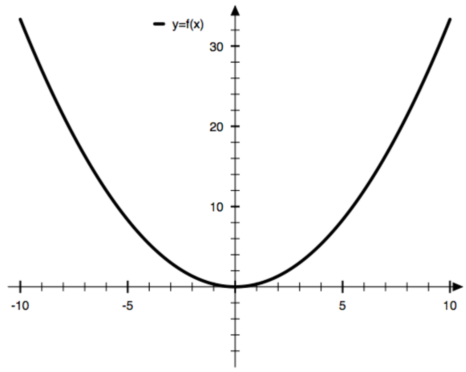

Figure 1 - Courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{3}$

Exemple 2: La courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $D_f = \mathbb{R}_+$), est

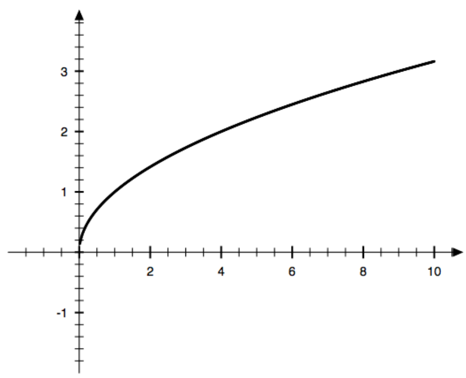

Figure 2 - Courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

Section 2 - Eléments d'étude de fonction

2.1. Variation d'une fonction: croissance, décroissance, monotonie

2.1.1 Variation d'une fonction sur un intervalle I, I étant une partie du domaine de définition de la fonction D_f

Une fonction f, définie sur un intervalle I (I pouvant être une partie de l'ensemble de définition de la fonction D_f), est:

- **Strictement croissante** sur I lorsque, quels que soient a et b dans I, si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$
- **Croissante** sur I lorsque, quels que soient a et b dans I, si $a<b$ alors $f(a)\leq f(b)$
- **Strictement décroissante** sur I lorsque, quels que soient a et b dans I, si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$
- **Décroissante** sur I lorsque, quels que soient a et b dans I, si $a<b$ alors $f(a)\geq f(b)$
- **Constante** sur I lorsque, quels que soient a et b dans I, si $a<b$ alors $f(a)=f(b)$

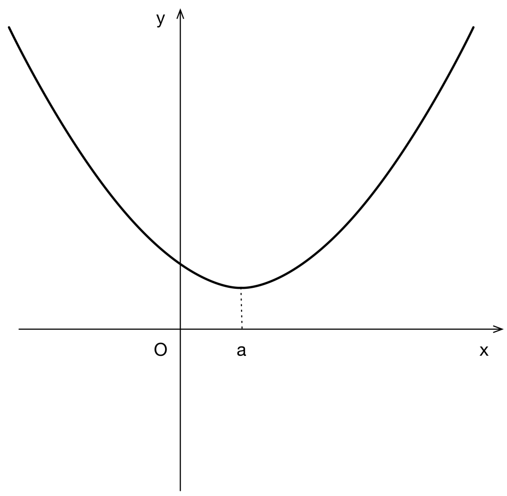

Figure 3 - Représentation d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;a]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$.

Pour étudier directement le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, **une première méthode** consiste à considérer deux réels quelconques a et b dans I, de supposer $a<b$, de calculer la différence $f(b)-f(a)$, et d'en déduire que la fonction est décroissante sur I si $f(b)-f(a)\leq 0$ ou que la fonction est croissante sur I si $f(b)-f(a)\geq 0$.

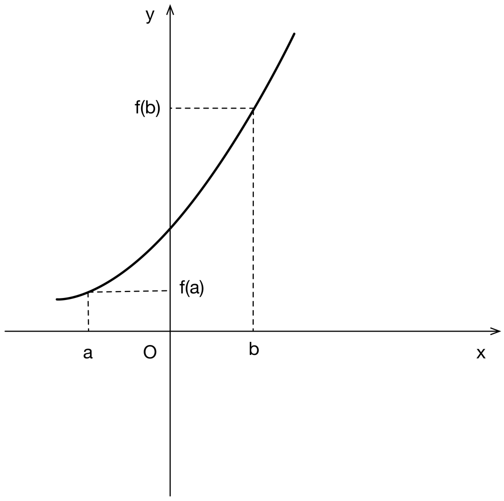

Figure 4 - Illustration d'une fonction strictement croissante ($a > b$ implique $f(b) > f(a)$ soit $f(a) - f(b) < 0$).

Une **seconde méthode** consiste à écrire $f(b) - f(a)$ sous la forme d'une expression algébrique $(b-a) \times g(a,b)$ où $g(a,b)$ est une expression dépendant des deux variables a et b. Puis on étudie le signe de $g(a,b)$ pour en déduire celui de $f(b) - f(a)$.

Il existe par ailleurs une **troisième méthode**, que nous présentons au 2.1.3.

Illustration: Montrer, au moyen de la seconde méthode, que la fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

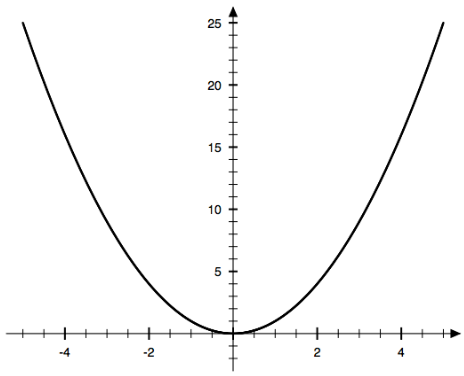

Figure 5 - Courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$

Intéressons nous en premier lieu à l'évolution de la fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$. Soit a et b deux variables réelles t appartenant à $\mathbb{R}_-$ telle que $a<b$.

On a $f(b)=b^2$ et $f(a)=a^2$ de sorte que:

$$f(b)-f(a)=b^2-a^2$$

ce qui peut également s'écrire (cf. Identités remarquables au chapitre précédent):

$$f(b)-f(a)=(b+a)(b-a).$$

Comme on suppose que $b>a$, alors $b-a>0$. Par ailleurs, comme on suppose que a et b appartiennent tous deux à $\mathbb{R}_-$, on a $b+a<0$. On en déduit donc que pour a et b appartenant tous deux à $\mathbb{R}_-$ et tels que $a<b$, le produit $(b+a)(b-a)$ est de signe négatif, de sorte que $f(b)-f(a)<0$. La fonction $f(x)=x^2$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Intéressons nous ensuite à l'évolution de la fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Soit a et b deux variables réelles t appartenant à $\mathbb{R}_+$ telle que $a<b$. On peut encore réécrire $f(b)-f(a)$ sous la forme $f(b)-f(a)=(b+a)(b-a)$.

Comme on suppose toujours que $b>a$, alors on a $b-a>0$. Par ailleurs, comme on suppose que a et b appartiennent tous deux à $\mathbb{R}_+$, on a $b+a>0$. On en déduit donc que pour a et b appartenant tous deux à $\mathbb{R}_+$ et tels que $a<b$, le produit $(b+a)(b-a)$ est de signe positif, de sorte que $f(b)-f(a)>0$. La fonction $f(x)=x^2$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2.1.2. Variation d'une fonction sur l'ensemble de son domaine définition D_f

Etudier le sens de variation de f **sur son ensemble de définition** D_f, c'est partager D_f en intervalles sur chacun desquels f est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Lorsque la fonction f est (strictement) **croissante ou décroissante sur l'ensemble de son domaine de définition**, c'est-à-dire si $I=D_f$, on dit de la fonction qu'elle est (strictement) **monotone**. Pour le dire autrement, une fonction monotone varie toujours dans le même sens sur tout son domaine de définition D_f.

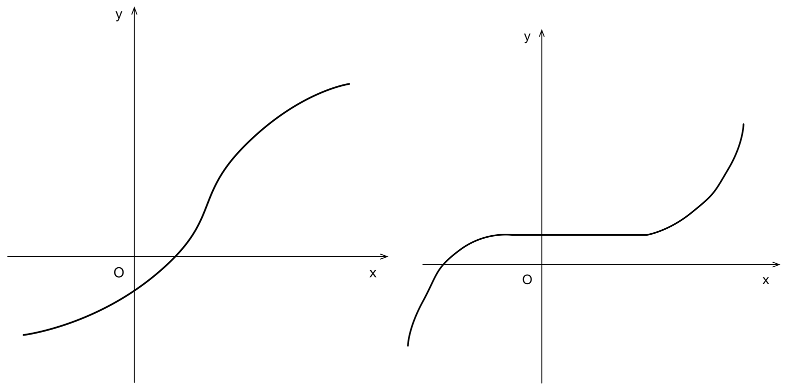

Figure 6 - Monotonie de fonctions (la fonction de gauche est strictement monotone, tandis que celle de droite est monotone).

2.1.3. Variations moyenne et marginale de fonctions

- *La notion de variation*

Il est possible d'étudier l'effet qu'engendre une variation de valeur de la variable explicative x sur la variable expliquée $y = f(x)$. Ainsi, lorsque x varie, passant d'une valeur x_1 à une valeur x_2, la variable y varie en conséquence, passant d'une valeur $f(x_1)$ à $f(x_2)$.

On note habituellement Δx **la variation de** x. Il s'agit de l'**écart entre la valeur de départ** x_1 **et la valeur d'arrivée** x_2 prise par x.

$$\Delta x = x_2 - x_1, \text{ c'est-à-dire } x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Notons que cet écart peut être positif ou négatif. Si x augmente alors $\Delta x > 0$. Dans le cas contraire, $\Delta x < 0$.

La variation de x conduit à une variation de $y = f(x)$, passant de $f(x_1)$ à $f(x_2)$. Cette variation se note:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$$

Comme $x_2 = x_1 + \Delta x$, on peut également écrire

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1 + \Delta) - f(x_1).$$

Illustration: on suppose que le coût total de production d'un nombre x de cartes de visites s'exprime au moyen de la fonction $y = f(x) = 10 + \sqrt{x}$. De combien augmente le coût de production si on demande à produire 100 cartes de visites plutôt que 81?

Réponse:

$$\Delta f(x) = f(100) - f(81)$$
$$\Delta f(x) = \left(10 + \sqrt{100}\right) - \left(10 + \sqrt{81}\right)$$
$$\Delta f(x) = \sqrt{100} - \sqrt{81} = 10 - 9 = 1$$

- *Le taux de variation moyen*

Les variations de x et $f(x)$ nous permettent de calculer le taux de variation moyen, ou taux d'accroissement moyen, de la fonction f.

Ce taux se calcule comme le quotient:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Il nous indique la variation moyenne, en unité, de $y = f(x)$ pour chaque unité de variation de x.

Illustration: Si on applique ce quotient à l'illustration précédente, on calcule:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{20 - 19}{100 - 81} = \frac{1}{19} \simeq 0{,}053$$

Ce qui signifie que le coût total de production a augmenté de 5,3 centimes d'euros par carte de visite produite supplémentaire.

Le taux de variation moyen est utile pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I. En effet, si l'on montre que sur cette intervalle, le signe du rapport $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$:

- Est positif, alors la fonction f est croissante sur cette intervalle;
- Est négatif, alors la fonction f est décroissante sur cette intervalle;
- Est nul, alors la fonction f est constante sur cette intervalle.

- *La valeur moyenne d'une fonction*

On doit **bien distinguer le taux d'accroissement moyen de la fonction de la valeur moyenne de la fonction**. Cette dernière se calcule:

$$\frac{f(x)}{x}$$

Illustration: dans l'exemple précédent, la valeur moyenne de la fonction correspondrait au coût moyen de production d'une carte de visite.

Si on produit 81 cartes, le coût total de production est 19 euros, ce qui fait un coût moyen de production de l'ordre de 23,4 centimes par carte produite. En revanche, si on produit 100 cartes, il en coûte 20 euros au total, ce qui fait un coût unitaire moyen de production égal à 20 centimes par carte de visite. On observe ici que le coût unitaire moyen de production semble baisser avec le volume de production.

- *Le taux de variation marginale d'une fonction*

Il convient enfin de présenter une autre variation, essentielle en économie et en gestion, qui est la variation marginale.

Une variation marginale d'une fonction $f(x)$ correspond à la **variation de cette fonction lorsque la variable explicative x varie (à la baisse, ou à la hausse, c'est selon) d'une unité**.

La variation marginale se calcule de la manière suivante:

$$\Delta y = f(x+1) - f(x)$$

Illustration: dans notre exemple précédent, on peut calculer la variation marginale de x lorsque l'on part d'une production de 81 ou de 100.

Si l'on part d'une production de 81, la production d'une 82ème carte de visite augmente le coût total de production d'un montant $f(82) - f(81) = \left(10 + \sqrt{82}\right) - \left(10 + \sqrt{81}\right) = \sqrt{82} - \sqrt{81} = \sqrt{82} - 9 \simeq 0{,}0553$.

Si l'on part d'une production de 100, la production d'une 101ème carte de visite augmente le coût total de production d'un montant $f(101) - f(100) = \left(10 + \sqrt{101}\right) - \left(10 + \sqrt{100}\right) = \sqrt{101} - \sqrt{100} = \sqrt{101} - 10 \simeq 0{,}0498$.

2.1.4. Concavité, convexité

Les propriétés de concavité et de convexité d'une fonction sont très utiles en économie. Elles portent sur la forme de sa courbe représentative sur un ensemble de définition donné.

Considérons la figure suivante, qui montre deux graphes de fonctions. Bien qu'ils soient tous deux croissants sur R_+, ces graphes présentent quelques différences du point de vue de leurs formes. La première courbe représentative, en trait continu, augmente de plus en plus fortement avec I, tandis que la seconde, en trait hachuré, augmente mais de moins en moins fortement. Cette différence de forme tient au fait que la courbe représentative en trait continu est convexe, tandis que l'autre, hachurée, est concave.

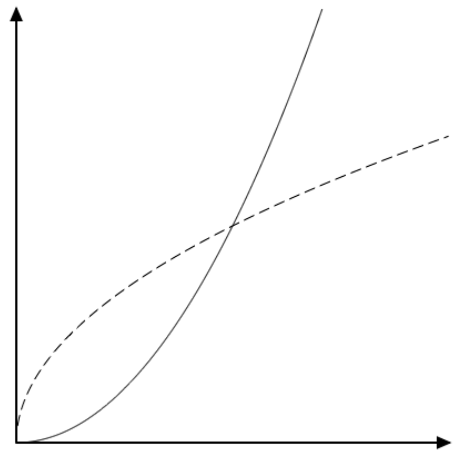

Figure 7 - Illustration d'une fonction croissante convexe (trait plein) et d'une fonction croissante concave (trait hachurée)

On définit formellement une fonction convexe ou concave de la façon suivante:

Une fonction f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle, avec $x_1 < x_2$, on a

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Une fonction f est **concave** sur un intervalle I si, pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle, avec $x_1 < x_2$, on a

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Graphiquement, une fonction est convexe si la droite qui relie $f(x_1)$ à $f(x_2)$ est située au dessus de la courbe représentative de f sur $[x_1,x_2]$. A l'inverse, une fonction est concave si la droite qui relie $f(x_1)$ à $f(x_2)$ est située au dessous de la courbe représentative de f sur $[x_1,x_2]$.

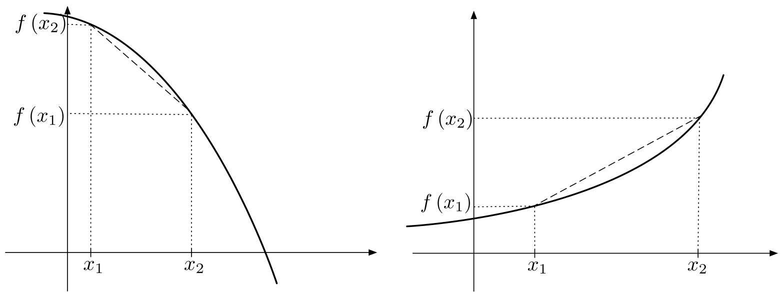

Figure 8 - Exemple de fonction décroissante concave (à gauche) et de fonction croissante convexe (à droite)

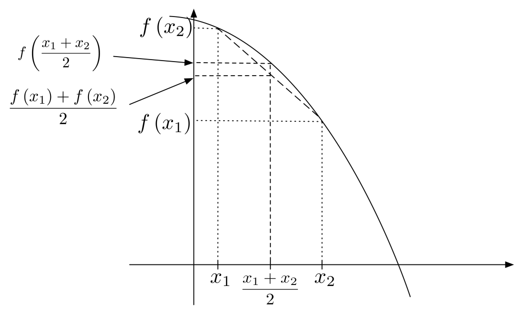

Figure 9 - Correspondance entre la démonstration formelle et la démonstration graphique de la concavité d'une fonction

Signalons enfin la propriété suivante: si la fonction f est convexe (respectivement concave) alors la fonction opposée $-f$ est concave (respectivement convexe).

2.2. Maximum, minimum

Certaines fonctions présentent des valeurs extrêmes, comme une valeur maximale ou une valeur minimale. Une première approche pour étudier et déterminer ces valeurs consiste à identifier un majorant ou un minorant pour la fonction.

2.2.1. Fonction majorée, minorée, bornée

Certaines fonctions peuvent être majorées, minorées, voire bornées, que ce soit sur leur domaine de définition D ou sur un intervalle plus restreint I.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite:

- **Majorée sur I** s'il existe un nombre réel M, tel que pour tout x de I, on a $f(x) \leq M$. Ce nombre M **est un majorant pour f sur I**.
- **Minorée sur I** s'il existe un nombre réel m, tel que pour tout x de I, on a $f(x) \geq m$. Ce nombre m **est un minorant pour f sur I.**
- **Bornée sur I** si elle est à la fois minorée et majorée sur cet intervalle.

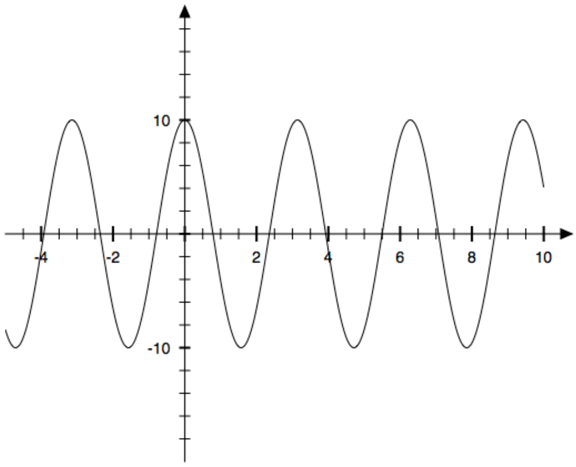

Figure 10 - Illustration d'une fonction bornée (ici, les valeurs $f(x)$ sont toujours comprises entre -10 et 10)

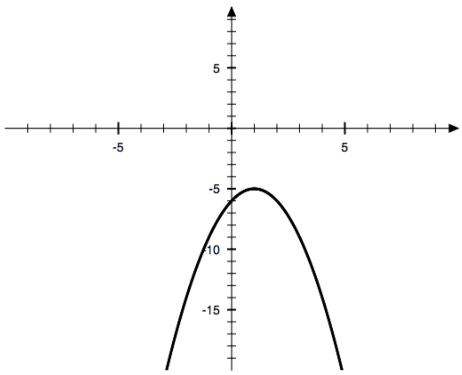

Figure 11 - Illustration d'une fonction majorée (ici, les valeurs $f(x)$ ne sont jamais supérieures à -5)

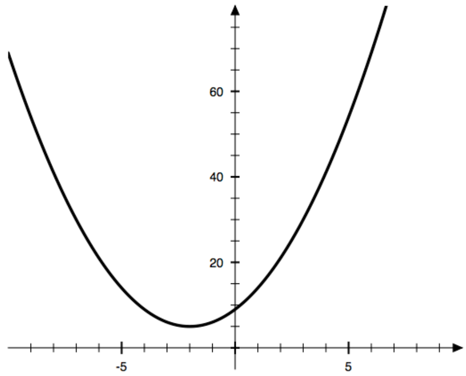

Figure 12 - Illustration d'une fonction minorée (ici, les valeurs $f(x)$ ne sont jamais inférieures à 5)

2.2.2. Extrema de fonction

Les extrema correspondent aux valeurs extrêmes (la plus élevée ou la plus faible) qu'une fonction peut prendre, sur son domaine de définition D_f ou sur un intervalle plus restreint I.

On parle d'**extremum local** lorsque l'on arrive à déterminer **un maximum et/ou un minimum de la fonction sur un intervalle** I.

On parle d'**extremum global** lorsque l'on arrive à déterminer **un maximum et/ou un minimum de la fonction sur l'intégralité de son domaine de définition** D_f.

- **Extrema locaux:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I.

- $f(a)$ est le **minimum local** de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$
- $f(a)$ est le **maximum local** de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$
- Le point $S(a, f(a))$ est un sommet de C_f, la courbe représentative de f, lorsque $f(a)$ est le maximal local ou le minimum local de f.

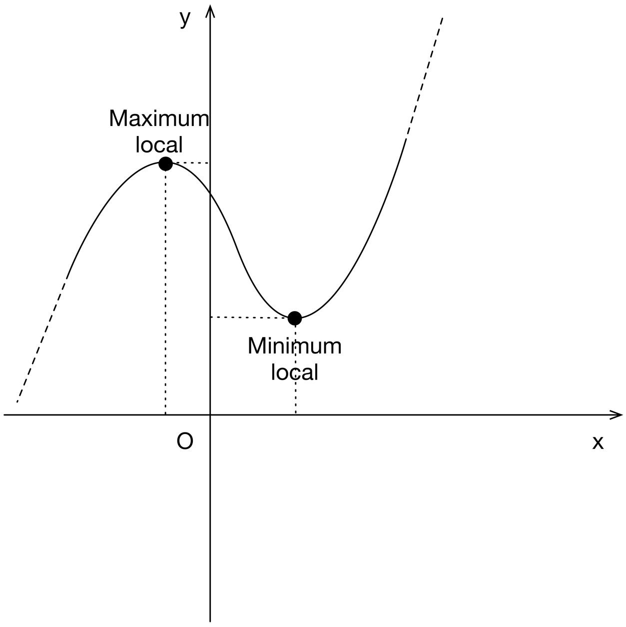

Figure 13 - Extrema locaux de fonctions

- **Extrema globaux:**

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, et a un réel appartenant à D_f.

- $f(a)$ est le **minimum global** pour f si pour tout x de D_f, on a $f(x) \geq f(a)$
- $f(a)$ est le **maximum global** pour f si pour tout x de D_f, on a $f(x) \leq f(a)$
- Le point $S(a, f(a))$ est un sommet de C_f, la courbe représentative de f, lorsque $f(a)$ est le maximal global ou le minimum global de f.

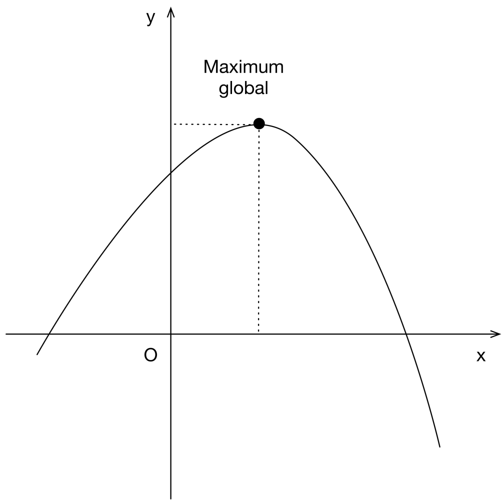

Figure 14 - Extremum global (en l'occurrence, un maximum) d'une fonction

Il convient de noter qu'une fonction peut avoir des extrema locaux sans avoir d'extremum global, à l'image de la fonction dont la courbe est représentée ci-après. Cette fonction admet un maximum local lorsque $x=a$ et un minimum local lorsque $x=b$. Pour autant, elle n'a pas de valeur maximale ou minimale au niveau de l'ensemble de son domaine de définition.

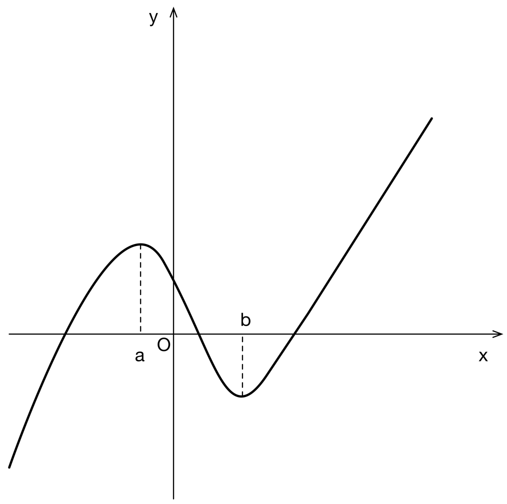

Figure 15 - Fonction ayant deux extrema locaux sans avoir d'extremum global.

- <u>**Liens entre croissance/décroissance d'une fonction et extrema**</u>

Une fonction monotone, c'est-à-dire croissante ou décroissante sur l'ensemble de son ensemble de définition, n'admet aucun extremum, local ou global. Par conséquent, une fonction qui admet au moins un extremum, local ou global, est nécessairement non-monotone.

Soit f une fonction non monotone définie sur un intervalle I. Si, sur l'intervalle I, la fonction f est:

- Croissante puis décroissante, alors f atteint un maximum local sur I;
- Décroissante puis croissante, alors f atteint un minimum local sur I.

2.3. Fonctions paires et impaires

<u>*2.3.1. Fonctions paires*</u>

Une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est **paire si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois**:

- pour tout x de D_f, $-x$ est également un élément de D_f. Pour le dire autrement, l'ensemble de définition doit être symétrique, c'est-à-dire que si la fonction f est définie pour tout réel x, elle l'est également pour le réel opposé $-x$

- **et** $f(-x)=f(x)$.

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Illustration: Démontrer que la fonction $f(x)=3x^2$ est une fonction paire.

Pour cela, on doit démontrer deux choses successivement:

- Tout d'abord, que si la fonction f est définie pour un réel x, alors elle l'est également pour l'opposé de ce réel, $-x$. C'est bien le cas car l'ensemble de définition de la fonction $f(x)=3x^2$ est $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tous les nombres réels, de sorte que si elle est définie pour une valeur réelle x, elle l'est nécessairement pour son opposé $-x$, qui appartient également à $\mathbb{R}$.
- Ensuite, que $f(-x)=f(x)$. Pour cela, on calcule $f(-x)$.

$$f(-x)=3(-x)^2=3\times(-1)^2\times x^2=3x^2$$

On vérifie bien au moyen de ce calcul que $f(-x)=f(x)=3x^2$.

2.3.2. Fonctions impaires

Une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est **impaire** si et **seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois**:

- pour tout x de D_f, $-x$ est également un élément de D_f. Pour le dire autrement, l'ensemble de définition doit être symétrique, c'est-à-dire que si la fonction f est définie pour tout réel x, elle l'est également pour le réel opposé $-x$
- **et** $f(-x)=-f(x)$.

Il en découle que la représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

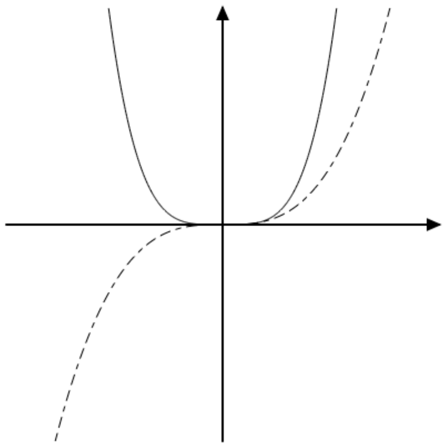

Figure 16 - Représentation d'une fonction paire (trait plein) et d'une fonction impaire (trait hachuré).

Illustration: Démontrer que la fonction $f(x)=2x$ est une fonction impaire.

Pour cela, on doit démontrer deux choses successivement:

- Tout d'abord, que si la fonction f est définie pour un réel x, alors elle l'est également pour l'opposé de ce réel, $-x$. C'est bien le cas car l'ensemble de définition de la fonction $f(x)=2x$ est $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tous les nombres réels, de sorte que si elle est définie pour une valeur réelle x, elle l'est nécessairement pour son opposé $-x$, qui appartient également à $\mathbb{R}$.
- Ensuite, que $f(-x)=-f(x)$. Pour cela, on calcule $f(-x)$.

$$f(-x)=2(-x)=-2x$$

On vérifie bien au moyen de ce calcul que $f(-x)=-f(x)$.

Section 3 - Quelques fonctions élémentaires

Il existe des familles de fonction que l'on retrouve fréquemment en économie et en gestion. Parmi celles-ci, on compte, des plus simples aux plus complexes:

- Les fonctions linéaires
- Les fonctions puissances
- Les fonctions polynomiales
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

3.1. Les fonctions linéaires:

Une fonction linéaire, également appelée affine, correspond à une équation du premier degré à deux inconnues, vues au chapitre précédent. Elle s'exprime sous la forme:

$$y = f(x) = ax + b \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels dont } a \text{ non nul.}$$

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$: il est possible d'associer une valeur $f(x)$ à tout réel x.

Elle se représente graphiquement par une droite de pente égale à a et dont l'ordonnée à l'origine est égale à b. La droite est croissante si a est positif, décroissante si a est négatif. Si a est nul, alors la droite est horizontale.

On en déduit donc qu'**une fonction affine est monotone, et par conséquent jamais paire.**

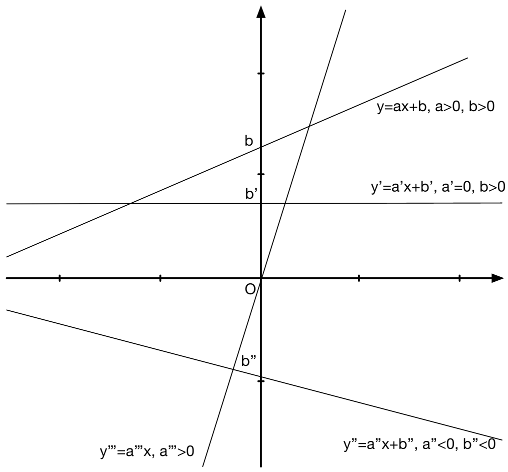

Figure 17 - Représentations graphiques de fonctions affines, selon les valeurs a *et* b

Une spécificité des fonctions affines est que la pente a de la droite est également la valeur du taux de variation moyen de la fonction, ainsi que de sa variation marginale, comme on peut le vérifier ci-dessous.

- Taux moyen de variation d'une fonction linéaire:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

- Variation marginale d'une fonction linéaire:

$$\Delta y = f(x+1) - f(x)$$
$$\Leftrightarrow \Delta y = a(x+1)+b-(ax+b) = a$$

- Valeur moyenne d'une fonction linéaire:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}$$

Lorsque b est nul, la droite passe par l'origine du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. La fonction $y = ax$ traduit alors une relation de proportion entre y et x. De plus, lorsque b est nul, la valeur moyenne de la fonction est également égale à a.

3.2. Les fonctions puissances

Les fonctions puissances ont pour forme générale:

$$y = f(x) = ax^b \quad, a \text{ et } b \text{ étant deux réels.}$$

On distingue différents types de fonctions puissances, selon la valeur de l'exposant puissance b

3.2.1. Si b est un entier naturel (donc positif) pair (supérieur ou égal à 2):

On parle de fonction puissance paire. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction paire au sens où nous l'avons vu à la fin de la section précédente. Sa courbe représentative est de forme parabolique, convexe, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées:

- Soit croissante sur $\mathbb{R}_-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}_+$, lorsque $a<0$;
- Soit décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$, lorsque $a>0$.

En conséquence, on comprend qu'une fonction puissance paire n'est pas monotone.

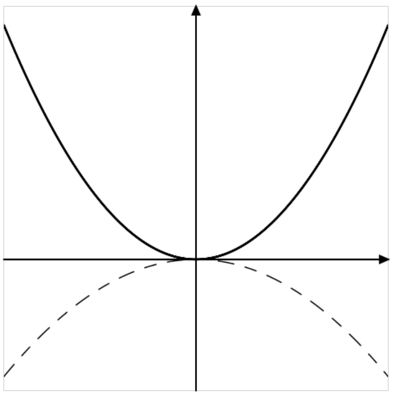

Figure 18 - Courbes représentatives de fonctions puissances paires ($a>0$ pour la courbe en trait plein, $a<0$ pour l'autre).

3.2.2. Si b est un entier naturel impair (supérieur ou égal à 3):

On parle dans ce cas d'une fonction puissance impaire. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction impaire au sens où nous l'avons vu à la fin de la section précédente. Sa courbe représentative est de forme hyperbolique, c'est-à-dire qu'elle est soit successivement concave puis convexe (si $a>0$), soit successivement convexe puis concave (si $a<0$). Enfin, elle a l'origine $O(0;0)$ comme centre de symétrie.

Une fonction puissance impaire est monotone, plus précisément:

- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$;
- Strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a<0$.

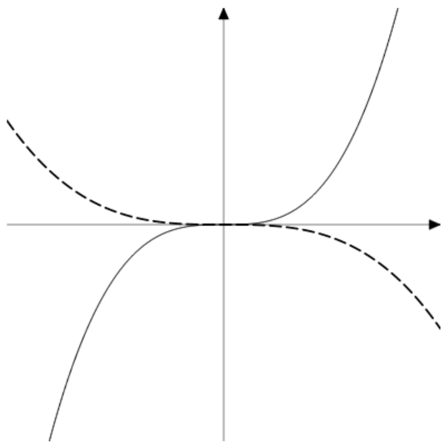

Figure 19 - Courbes représentatives de fonctions puissances impaires.

3.2.3. Si b est un entier négatif pair:

Dans ce cas, la fonction peut se réécrire:

$$y = f(x) = ax^b = \frac{a}{x^{|b|}} = \frac{a}{x^{-b}}$$

On en déduit que la fonction ne peut être calculée lorsque $x = 0$, de sorte que **son ensemble de définition est** $\mathbb{R}^*$.

Une fonction puissance négative paire est une fonction paire au sens où nous l'avons vu à la fin de la section précédente (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). Elle n'est pas monotone, elle est soit:

- croissante sur $\mathbb{R}_-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}_+$, convexe, lorsque a >0.
- décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$, concave, lorsque $a < 0$;

Par ailleurs, la courbe représentative d'une fonction puissance négative paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

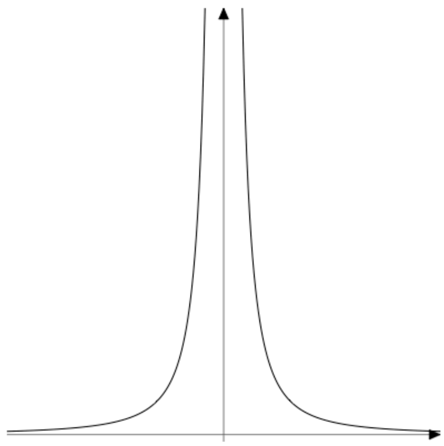

Figure 20 - Courbe représentative d'une fonction puissance négative paire, avec a un réel positif

3.2.4. Si b est un entier négatif impair:

Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$.

Une fonction puissance négative impaire est une fonction impaire au sens où nous l'avons vu à la fin de la section précédente. Elle est monotone, et plus précisément:

- strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$, convexe puis concave, lorsque $a<0$;
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$, concave puis convexe, lorsque $a>0$.

Sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine $O(0;0)$.

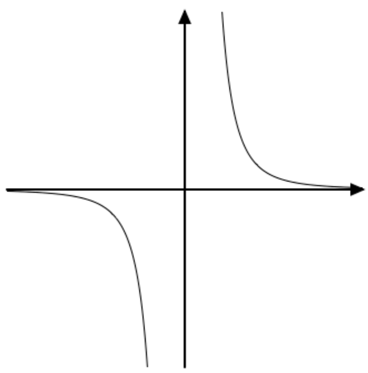

Figure 21 - Courbe représentative d'une fonction puissance négative impaire, avec $a>0$

3.2.5. Si b vaut $\frac{1}{2}$:

Dans ce cas, la fonction se réécrit:

$$y = f(x) = ax^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{x}$$

Il s'agit d'une fonction de type **racine carrée**. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$.

La fonction racine carrée $a\sqrt{x}$ est monotone croissante et concave si $a > 0$, décroissante et convexe sinon. Sa courbe représentative est de la forme:

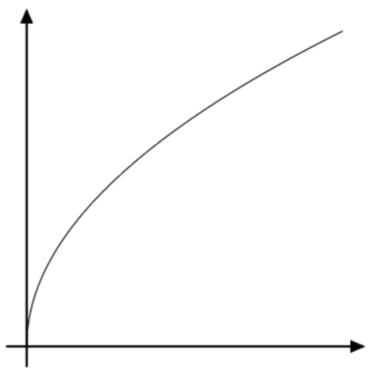

Figure22 - Courbe représentative d'une fonction de type racine carrée, avec $a > 0$

3.3. Les fonctions polynomiales:

Une fonction polynomiale, ou polynôme, se définit comme une somme de fonctions puissances entières d'exposants différentes. Le degré d'une fonction polynomiale est le plus grand exposant qui la compose. Ainsi, la forme générale d'un polynôme de degré n est:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

L'ensemble de définition d'une fonction polynomiale est $\mathbb{R}$.

Une des fonctions polynomiales les plus fréquentes est le polynôme du second degré, dont la forme caractéristique est :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Un polynôme du second degré n'est pas une fonction monotone. En effet, il est soit:

- Décroissant puis croissant, convexe, si $a > 0$;
- Croissant puis décroissant, concave, si $a < 0$.

De plus, la courbe représentative d'un polynôme du second degré:

- Coupe par deux fois l'axe des abscisses si $b^2 - 4ac > 0$;
- Admet un point de tangence avec l'axe des abscisses si $b^2 - 4ac = 0$;
- Ne coupe pas l'axe des abscisses si $b^2 - 4ac < 0$;

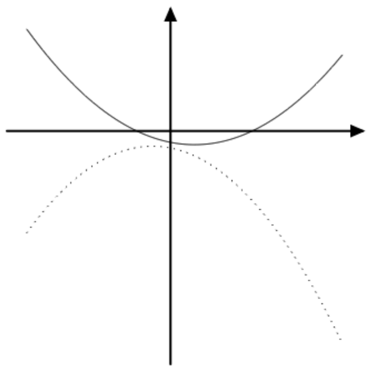

Figure 23 - Courbes représentatives de polynômes du second degré ($a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$ pour la courbe en trait plein, $a < 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ pour la courbe en pointillés).

3.4. Les fonctions exponentielles.

Les fonctions exponentielles sont très utiles en mathématiques financières.

3.4.1. La fonction exponentielle de base a

La forme générale d'une fonction exponentielle de base a est:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

avec b un réel quelconque et a **un réel positif** différent[2] de 1, que l'on appelle base de l'exponentielle.

[2] En effet, si $a = 1$ alors $1^x = 1$ quelle que soit la valeur de x .

L'ensemble de définition d'une fonction exponentielle de base a est $\mathbb{R}$. Elle est monotone selon la valeur des paramètres a et b.

	b>0	b<0
0<a<1	La fonction est décroissante positive, de forme convexe	La fonction est croissante négative, de forme concave
a>1	La fonction est croissante positive, de forme convexe	La fonction est décroissante négative, de forme concave

Attention: La fonction exponentielle de base a est souvent confondue avec la fonction puissance d'exposant a. Il convient de faire attention. Dans le premier cas, c'est bien la variable a qui est exprimée à la puissance x tandis que dans le second, c'est la valeur x qui est portée à la puissance a. Dans le premier cas, on multiplie le réel a un nombre x de fois par lui-même. Dans le second, on multiplie le réel x un nombre a de fois par lui-même.

Exemple de fonction exponentielle de base a: $f(x)=a^x$

Exemple de fonction puissance d'exposant a: $f(x)=x^a$

Il convient de faire attention, car ces deux types de fonctions ont des propriétés différentes. En particulier, les fonctions exponentielles n'ont aucune propriété de symétrie (axiale ou centrale) et ne sont donc jamais paire ni impaire.

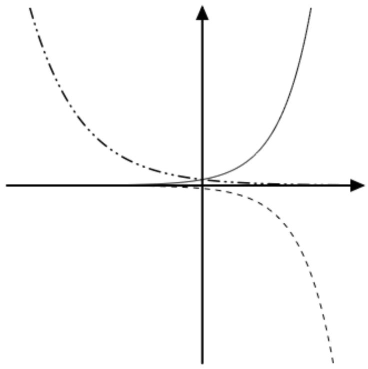

Figure 24 - Courbes représentatives de fonctions exponentielles (trait plein: $b>0$ et $a>1$; trait hachuré régulier: $b>0$ et $0<a<1$; trait hachuré irrégulier: $b<0$ et $a>1$).

3.4.2. La fonction exponentielle (ou exponentielle naturelle).

La fonction exponentielle (ou exponentielle naturelle) est une **fonction exponentielle de base a avec a ayant pour valeur e**, qui est un nombre irrationnel particulier ($e \simeq 2{,}718281...$), appelé nombre d'Euler.

Elle s'écrit $f(x)=e^x$ et son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Comme $e>1$, on devine que la fonction $f(x)=e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle prend la valeur $e^0=1$ lorsque $x=0$. Sa valeur est comprise entre 0 et 1 lorsque x est négatif. Lorsque x est positif, $f(x)$ devient dès lors supérieur à 1 et augmente très fortement à mesure que x augmente, d'où sa forme convexe, comme on peut le voir sur la figure suivante.

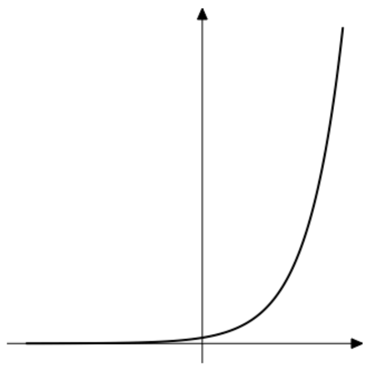

Figure 25 - Fonction exponentielle $f(x)=e^x$

3.5. La fonction logarithme

<u>*3.5.1. La fonction logarithme de base* a</u>

La fonction logarithme de base a se note:

$f(x)=\log_a x$, avec a un réel strictement positif et différent de 1.

Même si c'est un peu compliqué à se représenter, sachez que le logarithme de base a d'un nombre x est le nombre y tel que $x=a^y$. On note ainsi que $y=\log_a x$.

La fonction logarithme de base a est strictement croissante, et seulement définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle n'est donc ni paire ni impaire. Sa valeur est strictement négative pour tout x appartenant à $]0;1[$, nulle si $x=1$ et positive pour tout $x>1$. Sa courbe représentative tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. Elle tend vers $+\infty$ quand x tend également vers $+\infty$. Elle est de forme concave, c'est-à-dire qu'elle augmente de moins en moins à mesure que x augmente.

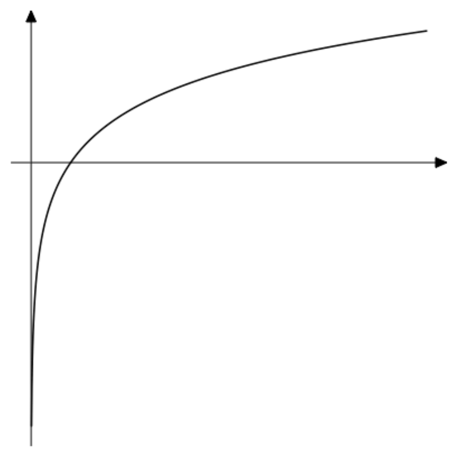

Figure 26 - Courbe représentative d'une fonction logarithme

L'intérêt des fonctions logarithme, quelle que soit leur base, tient avant tout aux propriétés de ces fonctions, uniques et très utiles en économie ou en finance. Ce sont surtout ces propriétés qu'il faut retenir.

En premier lieu, on a:

$$\log_a(1)=0$$

En effet, si $x=1$, alors on doit avoir $x=a^y=1$, ce qui n'est possible que si $y=0$

$$\log_a(a)=1$$

En effet, si $x=a$, alors on doit avoir $a=a^y$, ce qui n'est possible que si $y=1$

Le logarithme d'un produit de deux nombres réels strictement positifs est égal à la somme des logarithmes de ces nombres, c'est-à-dire:

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a(x_1)+\log_a(x_2)$$

Il découle de cette propriété une autre, à savoir:

$$\log_a(x^n)=n\log_a(x)$$

En effet, comme $x^n=\underbrace{x\times x\times ...\times x\times x}_{n \text{ fois}}$, alors

$$\begin{aligned}\log_a(x^n)&=\log_a\left(\underbrace{x\times x\times ...\times x\times x}_{n \text{ fois}}\right)\\&=\underbrace{\log_a(x)\times\log_a(x)\times ...\times\log_a(x)\times\log_a(x)}_{n \text{ fois}}\\&=n\log_a(x)\end{aligned}$$

Par ailleurs, le logarithme d'un quotient de deux nombres réels strictement positifs est égal à la différence des logarithmes de ces nombres, c'est-à-dire:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\log_a(x_1)-\log_a(x_2)$$

De cette propriété en découle une autre:

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$$

En effet:

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a(1)-\log_a(x)=0-\log_a(x)$$

3.5.2. La fonction logarithme de base e — $\ln x$, ou logarithme népérien (également appelée logarithme naturel, et auquel correspond la touche ln sur les calculatrices scientifiques)

La fonction logarithme népérien est **la plus commune et fréquemment utilisée des fonctions logarithme**. Elle se note $\ln x$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme toutes les fonctions logarithme et est strictement croissante. Sa particularité est d'avoir pour base le réel irrationnel e ($e \simeq 2{,}71828...$), que l'on a présenté en s'intéressant aux fonctions exponentielles.

$$\ln x = \log_e x$$

La fonction $\ln x$ vérifie **les mêmes propriétés que celles mentionnées précédemment- et qu'il importe de retenir et maîtriser**, à savoir, pour tout couple x_1 et x_2 strictement positifs:

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

$$\ln(x^n) = n\ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

Université de Brest
UFR Droit, Economie, Gestion, AES

Cours de mathématiques
S2 Licence AES
2015-2016

Chapitre 3 - Dérivées de fonctions numériques à une variable et applications

Ce chapitre complète le chapitre précédent, consacré à l'étude des fonctions numériques à une variable, en abordant la notion de dérivation.

Pour une présentation plus approfondie et claire des dérivées de fonctions, le lecteur intéressé pourra encore se tourner vers les chapitres 11 et 12 de l'excellent ouvrage Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion[1], rédigé par Jean-François Caulier, publié en 2014 aux éditions De Boeck (collection Ouvertures Economiques), et dont nous nous inspirons en partie.

[1] http://www.deboecksuperieur.com/titres/131749_2/9782804187774-fondements-mathematiques.html

Section 1 - La notion de dérivée de fonction

1.1. Présentation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point

Soit $f(x)$ une fonction à une variable dont le domaine de définition est D_f et la courbe représentative C_f. La dérivée de la fonction f au point a, notée $f'(a)$, correspond à la valeur de la pente de la tangente à la courbe C_f pour la valeur $x = a$ (cf. figure *1*).

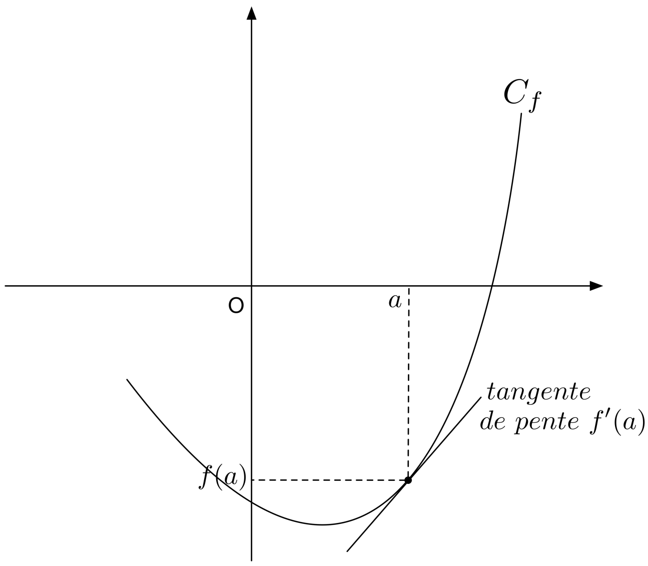

Figure 1 - Illustration graphique de la dérivée d'une fonction en un point

Il est possible de faire un rapprochement entre la valeur de la pente de la tangente de la courbe représentative d'une fonction et le taux de variation moyen de cette fonction. Comme on peut le constater sur la figure *2*, le taux de variation moyen de la fonction lorsque x passe de a à b correspond à la pente de la droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

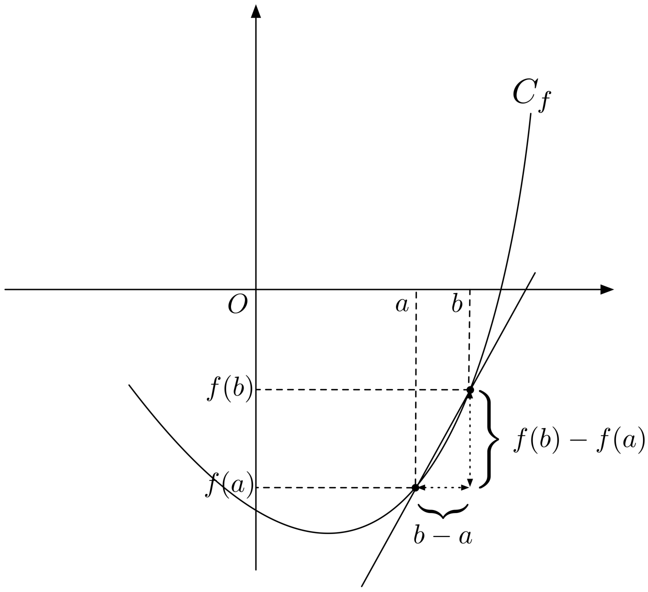

Figure 2 - Illustration graphique du taux de variation moyen d'une fonction entre a et b

On comprend, en comparant les figures *1* et *2*, que plus l'on rapproche b de a, et plus la valeur du taux de variation moyen de la fonction s'approche de celle de la pente de la tangente de la fonction pour $x = a$.

Cette convergence entre taux de variation moyen et valeur de la dérivée d'une fonction, que l'on comprend graphiquement, s'écrit mathématiquement:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si l'on note $b = a + \Delta x$, Δx correspond à l'écart entre a et b (en effet, $\Delta x = b - a$), l'expression précédente s'écrit également:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

1.2. Fonction dérivée d'ordre 1 (ou du premier ordre, ou dérivée première)

1.2.1. Présentation

Il est possible de calculer la valeur de la dérivée d'une fonction f en tout point x de son domaine de définition D_f à partir de la fonction dérivée de la fonction par rapport à x, que l'on note f' ou $\frac{df}{dx}$. Cette fonction dérivée, ou dérivée de f, associe à tout x de D_f la valeur $f'(x)$, qui correspond à la pente de la tangente à la courbe représentative de C_f pour la valeur x.

Formellement, la valeur $f'(x)$ d'une fonction f se calcule de la manière suivante:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

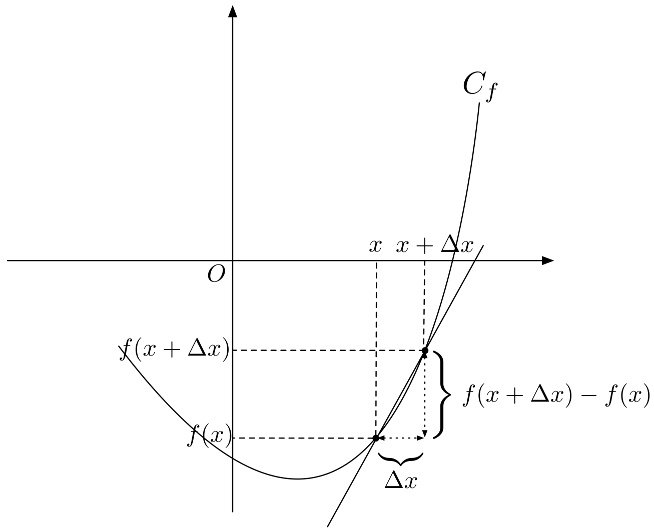

Figure 3 - Illustration graphique de la convergence entre le taux de variation moyen d'une fonction et la valeur de sa dérivée en x

1.2.2. Fonctions dérivées usuelles

Cette formule générale permet de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires que nous avons vues à la dernière section du chapitre précédent. Ces fonctions dérivées sont présentées dans le tableau suivant. Elles admettent chacune un intervalle de dérivabilité spécifique, c'est-à-dire un ensemble de valeurs que peut prendre la variable x et pour lesquelles $f'(x)$ peut être calculé. Comme on pourra s'en rendre compte, le domaine de dérivabilité d'une fonction peut être légèrement différent de son domaine de définition.

$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
b	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
x^n	$\mathbb{R}$	$n\times x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x

<u>Exemples:</u>

On peut ainsi déterminer que:

- la dérivée de la fonction $f(x)=x^3$ est la fonction $f'(x)=3x^2$.
- la dérivée de la fonction $f(x)=3x+4$ est la fonction $f'(x)=3$.

1.2.3. Règles de dérivation

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, n un entier naturel et k un nombre réel. Alors, pour tout x de I:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

$$\left(k\times f(x)\right)' = k\times f'(x)$$

$$\left(f(x)\times g(x)\right)' = f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$$

$$\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n\times\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} \quad \text{à la condition que } f(x)\neq 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \quad \text{à la condition que } g(x)\neq 0$$

Exemples:

L'application de ces règles permet de calculer que:

- la dérivée première de la fonction $f(x)=x^3+2x-4$ est la fonction $f'(x)=3x^2+2$.
- la dérivée première de la fonction $f(x)=(1-x)^3$ est la fonction $f'(x)=-3(1-x)^2$.
- la dérivée première de la fonction $f(x)=2x-3-\frac{1}{x}$ est la fonction $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$.
- la dérivée première de la fonction $f(x)=\frac{1}{1-x}$ est la fonction $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

1.2.4. Dérivée d'une fonction composée:

Si la fonction f est dérivable au point x et la fonction g est dérivable au point $f(x)$, alors la **fonction composée** $g(f(x))$ est dérivable en x et

$$\left(g(f(x))\right)'=f'(x)\times g'(f(x))$$

On déduit de ce théorème les deux propriétés suivantes:

1. Soit f une fonction strictement positive sur un intervalle I. La dérivée de la fonction composée $\ln(f(x))$ est la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$.
2. La dérivée de la fonction composée $e^{f(x)}$ est la fonction $f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Exemples:

- Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, la dérivée de la fonction $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ se calcule $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
- La dérivée de la fonction $f(x)=e^{3x^2+x}$ se calcule $f'(x)=(6x+1)e^{3x^2+x}$.

1.3. Fonction dérivée d'ordre 2 (ou du second ordre, ou dérivée seconde)

Il est possible de dériver une fonction dérivée, en appliquant les mêmes règles que vues précédemment. On appelle en particulier dérivée d'ordre 2, ou du second ordre, la dérivée de la fonction dérivée d'ordre 1 $f'(x)$. On la note $f''(x)$ ou encore $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Exemples:

La dérivée première de la fonction $f(x)=x^3-3x^2+4$ est la fonction $f'(x)=3x^2+6x$. Sa dérivée seconde se calcule en dérivant la dérivée première par rapport à x. Elle s'exprime $f''(x)=6x+6$.

La dérivée première de la fonction $f(x)=2x-3-\frac{1}{x}$ est la fonction $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$. Sa dérivée seconde se calcule en dérivant la dérivée première par rapport à x. Elle s'exprime $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$.

Section 2 - Applications des dérivées

2.1. Sens de variation

La dérivée première d'une fonction $f(x)$ est utile pour connaître le sens de variation de cette fonction.

Si l'on considère la figure suivante et garde en tête le fait que la valeur de la dérivée première d'une fonction en un point correspond à la pente de la tangente de la courbe de cette fonction, on comprend que lorsqu'une fonction est croissante sur un intervalle donné, la pente d'une droite tangente sur cet intervalle est positive. A l'inverse, lorsqu'une fonction est décroissante sur un intervalle donnée, la pente d'une droite tangente sur cet intervalle est négative.

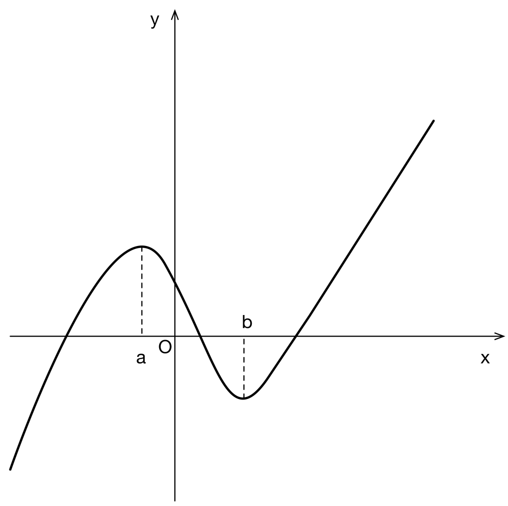

Figure 4 - Courbe d'une fonction croissante sauf sur [a,b]

Cela permet de comprendre le théorème suivant, permettant de déterminer le sens de variation d'une fonction sur un intervalle donné.

Si une fonction $f(x)$ est dérivable sur I alors:

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction est **strictement croissante** sur I;
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction est **strictement décroissante** sur I;
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction est **constante** sur I;
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction est **croissante** sur I;
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction est **décroissante** sur I.

Exemples:

Soit la fonction $f(x)=x^2$. Sa dérivée première se calcule $f'(x)=2x$. Il en découle que la dérivée première $f'(x)$ est positive pour tout $x>0$ et négative pour tout $x<0$. Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit la fonction $f(x)=x^3$. Sa dérivée première se calcule $f'(x)=3x^2$. Il en découle que la dérivée première $f'(x)$ est positive pour tout x .Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2. Convexité et concavité

La dérivée seconde d'une fonction est utile pour déterminer si cette fonction est convexe ou concave sur un intervalle donné.

Plus particulièrement, si l'on suppose que $f(x)$ est doublement dérivable sur I alors:

- La fonction est **convexe** sur I si et seulement si $f''(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$;
- La fonction est **concave** sur I si et seulement si $f''(x)\leq 0$ pour tout $x\in I$;

Exemples:

Soit la fonction $f(x)=x^2$. Sa dérivée seconde se calcule $f''(x)=2$. Il en découle que la dérivée seconde $f''(x)$ est positive pour tout x .Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit la fonction $f(x)=x^3$. Sa dérivée seconde se calcule $f''(x)=6x$. Il en découle que la dérivée seconde $f''(x)$ est positive pour tout $x>0$ et négative pour tout $x<0$. Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2.3. Recherche et caractérisation d'extrema

Les dérivées première et seconde d'une fonction sont également très pratiques pour caractériser les éventuels extrema de cette dernière. Si l'on observe à nouveau la figure *4*, on remarque que la tangente de la courbe de la fonction est nulle (la tangente est horizontale) à chacun des extrema locaux de la fonction (lorsque $x=a$ et lorsque $x=b$).

Cette observation amène à un premier théorème:

Si une fonction $f(x)$ admet un maximum local ou un minimum local en un point x_0 et si $f(x)$ est dérivable en x_0, **alors** $f'(x_0)=0$.

ATTENTION: Pour autant, la réciproque n'est pas systématiquement vraie. Il est possible d'avoir une fonction $f(x)$ dérivable en x_0 et telle que $f'(x_0)=0$, sans pour autant que la fonction admette un minimum local ou un maximum local au point x_0. Dans ce cas, la fonction admet un **point d'inflexion** en x_0, c'est-à-dire que la courbe passe d'un état de convexité à un état de concavité (ou inversement), comme on peut le voir illustré sur la figure suivante.

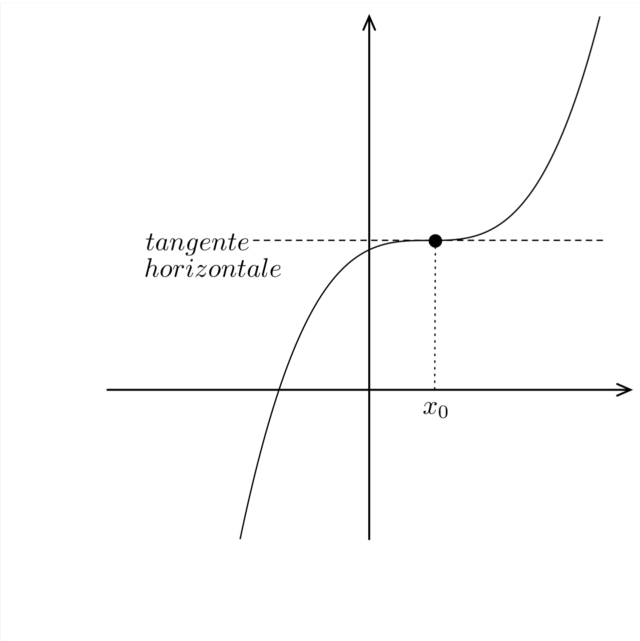

Figure 5 - Illustration d'un point d'inflexion en x_0

Si l'on observe qu'en un point x_0, la dérivée première de la fonction $f(x)$ est nulle (c'est-à-dire que $f'(x_0)=0$) alors le signe de la dérivée seconde de la fonction permet de savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local, ou d'un point d'inflexion, comme l'indique le second théorème, qui suit:

Soit une fonction $f(x)$ deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$:

- **Si** $f'(x_0)=0$ et $f''(x_0)<0$ **alors** la fonction admet un **maximum local** en x_0 ;
- **Si** $f'(x_0)=0$ et $f''(x_0)>0$ **alors** la fonction admet un **minimum local** en x_0 .
- **Si** $f'(x_0)=0$ et $f''(x_0)=0$ **alors** la fonction admet un **point d'inflexion** en x_0

Exemples:

Soit la fonction $f(x)=x^2$. Sa dérivée première se calcule $f'(x)=2x$ et s'annule pour $x=0$. Sa dérivée seconde se calcule $f''(x)=2$. Il en découle que la dérivée seconde $f''(x)$ est positive pour tout x, donc pour $x=0$. Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^2$ admet un minimum en $x=0$.

Soit la fonction $f(x)=x^3$. Sa dérivée première se calcule $f'(x)=3x^2$ et s'annule pour $x=0$. Sa dérivée seconde se calcule $f''(x)=6x$. Il en découle que la dérivée seconde $f''(x)$ est nulle pour $x=0$. Cela nous permet d'en déduire que la fonction $f(x)=x^3$ admet un point d'inflexion en $x=0$.

2.4. Dérivée première et variation marginale d'une fonction

Pour rappel, nous avons considéré dans le chapitre 2 qu'une variation marginale d'une fonction $f(x)$ correspondait à la **variation de cette fonction lorsque la variable explicative x variait (à la baisse, ou à la hausse, c'est selon) à la marge, c'est-à-dire un petit peu.** Nous avions alors assimilé cette petite variation comme correspondant à une variation de x **d'une unité** (x passe de la valeur x à la valeur $x+1$) et se calculait $\Delta f = f(x+1)-f(x)$.

La dérivée première permet de préciser la variation marginale d'une fonction $f(x)$, en envisageant une variation encore plus petite de x. En effet, la dérivée première d'une fonction $f(x)$ se calcule:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

De par son calcul, la dérivée première de la fonction indique de combien cette fonction varie lorsque x varie de manière infinitésimale, ou pour le dire autrement, infiniment petite.

De ce fait, on considère mathématiquement que **le vrai taux de variation marginale d'une fonction est sa dérivée première**, l'approche présentée au chapitre 2 n'étant qu'une approximation malgré son intérêt pédagogique.

Exemples:

Reprenons l'illustration proposée au second chapitre, qui supposait que le coût total de production d'un nombre x de cartes de visites s'exprimait au moyen de la fonction $f(x)=10+\sqrt{x}$. Le coût marginal de production (c'est-à-dire la variation du coût total de production induite par une variation marginale du nombre de cartes de visites) correspond à la dérivée première de $f(x)$ par rapport à x et se calcule $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Soit une entreprise produisant une marchandise en quantité q. Elle doit pour cela supporter un **coût total de production** donné par la relation suivante:

$$CT(q)=q^3+4q+10$$

Dans ce cas, le **coût moyen de production** (c'est-à-dire le coût unitaire de production de chacune des q unités) se calcule:

$$CM(q)=\frac{CT(q)}{q}=\frac{q^3+4q+10}{q}=q^2+4+\frac{10}{q}$$

De même, le **coût marginal de production** (c'est-à-dire la variation du coût total de production lorsque la quantité produite augmente à la marge) se calcule

$$Cm(q)=\frac{dCT(q)}{dq}=3q^2+4$$

Université de Brest
UFR Droit, Economie, Gestion, AES

Cours de mathématiques
S2 Licence AES
2015-2016

Chapitre 4 - Quelques notions de mathématiques financières

Ce chapitre vise à présenter quelques éléments de mathématiques financières. Les étudiants intéressés pourront se reporter, pour avoir des précisions complémentaires sur ces différents points, aux ouvrages suivants:

- Louis Esch (2010), Mathématiques pour économistes et gestionnaires, 4ème édition, De Boeck;
- Didier Schlachter (2012), Comprendre les mathématiques financières, 4ème édition, Hachette.

La première section rappelle/présente les séries arithmétiques et géométriques, qui constituent des notions essentielles pour les mathématiques financières.

La seconde section traite des intérêts, de la valeur acquise et de la valeur actuelle associés à des placements financiers.

Enfin, la dernière section aborde la question des annuités, soit de placement soit d'emprunt.

Section 1 - Suites arithmétiques et géométriques

1.1. Définition d'une suite numérique

On appelle suite numérique $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une succession infinie de nombres réels, appelés termes de la suite, qui peuvent être définis successivement les uns par rapport aux autres, au moyen d'une **relation de récurrence**.

Chaque terme de la suite est désigné au moyen d'un indice entier naturel, qui désigne son rang. Par exemple, le terme u_k, $k\in\mathbb{N}$, désigne le terme de rang *k* de la suite numérique.

La relation de récurrence est quant à elle une relation f qui permet de définir chaque terme de la suite numérique au moyen du terme du rang antérieur.

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple 1 - Les termes 1,2,3,4,5 sont des termes successifs d'une suite numérique qui consiste, pour trouver la valeur du terme de rang *n*, à ajouter une unité au terme de rang *n-1*.

Exemple 2 - Les termes 1,2,4,8,16 sont des termes successifs d'une suite numérique qui consiste, pour trouver la valeur du terme de rang *n*, à multiplier par 2 le terme de rang *n-1*.

On distingue deux grands types de suites numériques: les suites arithmétiques et les suites géométriques. La forme de la relation de récurrence qui caractérise chacun de ces types est très spécifique.

1.2. Suite arithmétique

1.2.1. Propriétés d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique est une suite numérique dont la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. Elle consiste, pour déterminer le terme de rang *n+1*, à ajouter une valeur réelle *r*, appelée raison, à la valeur du terme de rang *n*.

Exemple: les termes 1,4,7,10,13 sont les termes successifs d'une suite arithmétique qui consiste à ajouter 3 à chaque terme pour déterminer la valeur du terme du rang suivant.

Comme il est possible d'avoir une multitude de suites arithmétiques différentes et ayant pourtant une même raison r, il est nécessaire, pour caractériser chacune, de préciser la valeur que prend son terme de rang 0, c'est-à-dire u_0.

La connaissance de ce terme u_0 permet alors d'écrire la suite arithmétique sous la forme générique suivante:

$$u_n = u_0 + r \times n$$

Illustration: l'ensemble de termes 2,4,6,8,10 sont des termes successifs d'une suite arithmétique de raison *r=2*, tout comme l'ensemble de termes 1,3,5,7,9, ou encore l'ensemble de termes 1,5; 3,5; 5,5; 7,5. Pourtant, ces trois ensembles de termes sont pas issus d'une même suite arithmétique.

Si on pose $u_0 = 2$, on peut dire que les termes du premier ensemble sont issues d'une suite arithmétique dont la forme générique est $u_n = 2 + 2n$.

Si on pose $u_0 = 1$, on peut dire que les termes du premier ensemble sont issues d'une suite arithmétique dont la forme générique est $u_n = 1 + 2n$.

Si on pose $u_0 = 2$, on peut dire que les termes du premier ensemble sont issues d'une suite arithmétique dont la forme générique est $u_n = 1{,}5 + 2n$.

Plus généralement, il est possible de déduire, sur la base de la forme générique, la relation suivante qui lie un terme de rang *n* avec un terme de rang différent, de valeur *p*:

$$u_n = u_p + r \times (n - p)$$

<u>1.2.2. Variation d'une suite arithmétique</u>

On déduit de la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ que $u_{n+1} - u_n = r$. Il en découle que la suite arithmétique est:

- Croissante si *r>0*;
- Décroissante si *r<0*;
- Stationnaire si *r=0*.

Graphiquement, les différents termes u_n sont alignés le long d'une droite (croissante si r>0, décroissante si r<0 et horizontale si r=0). On qualifie cette progression linéaire de progression arithmétique.

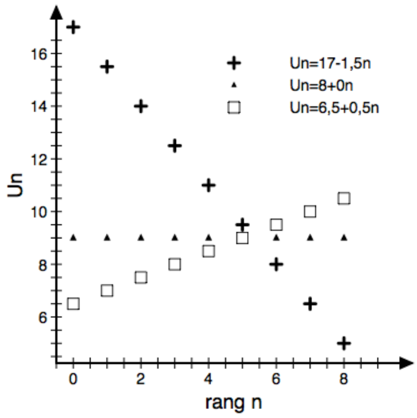

Figure 1 - Illustration graphique de suites arithmétiques croissante, décroissante et stationnaire

<u>*1.2.3. Somme de termes successifs d'une suite arithmétique*</u>

La somme de termes successifs d'une suite arithmétique vérifie la propriété suivante:

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = (n+1-p)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

<u>Moyen mnémotechnique</u>: Pour s'aider à mémoriser cette formule, il faut se dire que pour calculer la somme de termes successifs, allant du rang *p* au rang *n*, d'une suite arithmétique, il faut multiplier le nombre de termes contenus dans la somme (soit *n+1-p*) par la moyenne du terme du plus petit rang et du terme du plus grand rang.

$$\underbrace{\sum_{i=p}^{n} u_i}_{\substack{\text{somme des termes successifs} \\ \text{d'une suite arithmétique,} \\ \text{compris entre le rang p et le rang n}}} = \underbrace{(n+1-p)}_{\substack{\text{nombre de termes} \\ \text{de la somme}}} \times \underbrace{\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)}_{\substack{\text{moyenne du terme du plus petit} \\ \text{et du terme du plus grand rang}}}$$

Exemple 1: l'ensemble de termes 2,4,6,8,10 est issu d'une suite arithmétique de forme générique $u_n = 2+2n$.

Leur somme se calcule $\sum_{i=0}^{4} u_i = (4+1-0)\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5\times 6 = 30$

Exemple 2: l'ensemble de termes 1,5; 3,5; 5,5; 7,5 est issu d'une suite arithmétique de forme générique $u_n = 1{,}5+2n$.

Leur somme se calcule $\sum_{i=0}^{3} u_i = (3+1-0)\left(\frac{1,5+7,5}{2}\right) = 4 \times 4,5 = 18$

1.3. Suite géométrique

1.3.1. Propriétés d'une suite géométrique

Une suite géométrique est une suite numérique dont la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = u_n \times q$. Elle consiste, pour déterminer le terme de rang *n+1*, à multiplier la valeur du terme de rang *n* par une valeur réelle *q*, que l'on appelle là-encore raison.

Exemple: les termes 1,2,4,8,16 sont les termes successifs d'une suite géométrique qui consiste à multiplier par 2 chaque terme pour déterminer la valeur du terme du rang suivant.

Comme il est possible d'avoir une multitude de suites géométriques différentes et ayant pourtant une même raison *q*, il est nécessaire, pour caractériser chacune, de préciser la valeur que prend son terme de rang 0, c'est-à-dire u_0.

La connaissance de ce terme u_0 permet alors d'écrire la suite arithmétique sous la forme générique suivante:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Plus généralement, il est possible de déduire, sur la base de la forme générique, la relation suivante qui lie un terme de rang *n* avec un terme de rang différent, de valeur *p*:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

1.3.2. Variation d'une suite géométrique de raison q positive

Les suites géométriques peuvent avoir pour raison q des valeurs réelles positives (exemple: *q*=1,7) comme négatives (exemple: *q*=-5). Comme ce chapitre vise à introduire des notions de mathématiques financières, nous nous concentrerons sur les suites géométriques dont la raison *q* est positive ou nulle, car ce sont celles qui sont utiles dans ce cadre.

Le sens de variation d'une suite géométrique dont la raison est positive dépend à la fois de la valeur du terme de rang 0 (u_0) et de la valeur de la raison *q* (selon qu'elle est inférieure, égale ou supérieure à 1).

On doit distinguer deux cas, selon que u_0 est positif ou négatif

Cas 1 - Si $u_0 > 0$ alors la suite géométrique est:

- Croissante si $q > 1$;
- Décroissante si $0 < q < 1$;
- Stationnaire si $q = 1$.

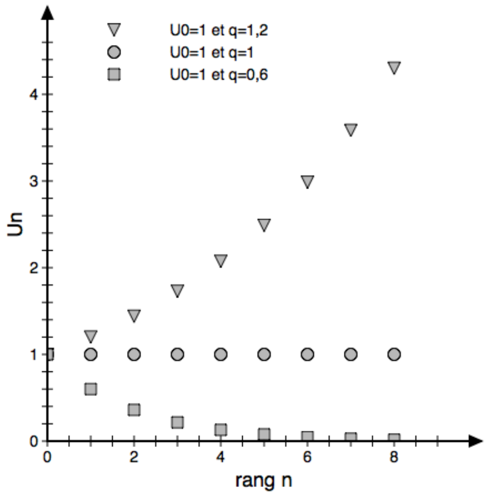

Figure 2 - Illustration graphique de suites géométriques croissante, décroissante et stationnaire avec u_0 positif

Cas 2 - En revanche, si $u_0 < 0$ alors la suite géométrique est:

- Croissante si $0 < q < 1$;
- Décroissante si $q > 1$;
- Stationnaire si $q = 1$;

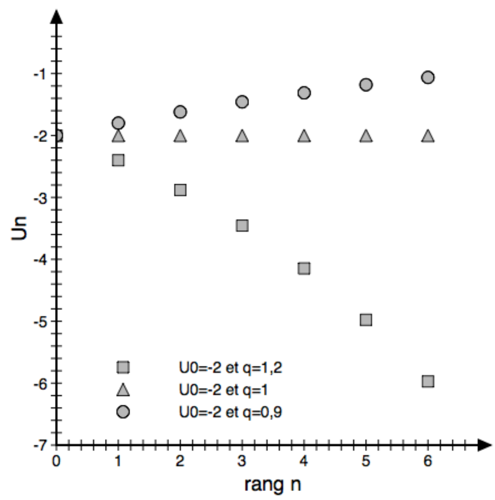

Figure 3 - Illustration graphique de suites géométriques croissante, décroissante et stationnaire avec u_0 négatif

<u>*1.3.3. Somme de termes successifs d'une suite géométrique*</u>

La somme de termes successifs d'une suite géométrique vérifie la propriété suivante:

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \left(\frac{1-q^{n+1-p}}{1-q} \right) \text{ si } \quad q \neq 1$$

et $\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \times (n+1-p)$ si $q = 1$

On peut retenir facilement la première égalité, à partir du moyen mnémotechnique suivant:

$$\underbrace{\sum_{i=p}^{n} u_i}_{\text{somme de (n+1-p) termes successifs d'une suite géométrique}} = \underbrace{u_p}_{\text{valeur du terme du plus petit rang}} \times \left(\frac{1- \overbrace{q}^{\text{valeur de la raison de la suite}}{}^{\overbrace{n+1-p}^{\text{nombre de termes contenus dans la somme}}}}{1-q} \right)$$

Exemple: l'ensemble de termes 4,8,16,32 sont issus d'une suite géométrique de forme générique $u_n = 4 \times 2^n$.

Leur somme se calcule $\sum_{i=0}^{3} u_i = 4\left(\frac{1-2^4}{1-2} \right) = 4 \times \left(\frac{-15}{-1} \right) = 4 \times 15 = 60$

Section 2 - Intérêts, valeurs acquises et valeurs actuelles

2.1. Définition de l'intérêt

Il arrive parfois, lorsque l'on dispose d'une certaine somme d'argent, qu'on la place pendant une certaine durée sur un compte rémunéré, en vue d'en obtenir un certain revenu, sous la forme d'intérêts.

A l'inverse, il arrive également, lorsque l'on souhaite financer un achat conséquent, sans détenir au préalable la somme d'argent nécessaire, que l'on emprunte une somme d'argent pendant une certaine durée et que l'on rémunère cette mise à disposition d'une somme d'argent par le versement d'intérêts.

La notion d'intérêt correspond au **loyer de l'argent**, c'est-à-dire la somme d'argent que doit payer l'emprunter au préteur en échange du fait d'avoir pu disposer d'une certaine somme d'argent pendant un certain temps.

Ce loyer s'exprime souvent sous la forme d'un **pourcentage, nommé taux d'intérêt**, et qui correspond au rapport qui existe entre le montant de l'intérêt à verser et la somme d'argent mise à disposition durant la période considérée.

Ainsi, une personne qui place 1000 euros pendant un an sur un compte épargne rémunéré à 2%/an obtient au terme de l'année 20 euros (2% de 1000 euros) de la part de l'établissement hébergeant le compte épargne en échange de cette mise à disposition de 1000 euros pendant une année.

De manière symétrique, une personne qui emprunterait pendant un an à sa banque la somme de 2000 euros au taux d'intérêt annuel de 3% devrait, au terme de l'année d'emprunt, rembourser sa banque des 2000 euros prêtés et lui verser en plus un montant de 60 euros (3% de 2000 euros) en échange du service de lui avoir mis à disposition 2000 euros pendant une année.

2.2. Valeur acquise d'une somme actuelle (ou valeur atteinte, ou valeur capitalisée ou valeur future)

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse d'un placement d'argent par un particulier contre intérêts. Ce dernier dispose d'une somme d'argent (ou **capital**) initiale C_0 qu'il place pendant plusieurs années au taux d'intérêt annuel de *i*%.

Si l'on désigne par C_t la valeur acquise (ou valeur capitalisée) par ce placement au bout de *t* années et par I_t l'intérêt produit par ce placement au terme de ces *t* années, on a:

$$C_t = C_0 + I_t$$

Cette valeur acquise dépend à la fois, positivement, du capital de départ, de la durée du placement et du taux d'intérêt annuel.

Pour la déterminer, on distingue deux cas de figure, selon que l'on se place dans un système d'intérêts simples ou un système d'intérêts composés.

2.2.1. Intérêts simples

Dans le cas d'intérêts simples, l'intérêt versé par l'emprunteur est proportionnel à la fois au capital initial emprunté C_0, à la durée du placement *t* et au taux d'intérêt *i*. Plus précisément, il se calcule:

$$I_t = C_0 \times i \times t$$

Exemple: dans ce cas de figure, une somme de 1000 euros placée pendant 10 ans au taux d'intérêt annuel de 5% aura généré en tout:

- 50 euros d'intérêts au bout d'un an;
- 100 euros d'intérêts au bout de deux ans;
- 150 euros d'intérêts au bout de trois ans;
- 200 euros d'intérêts au bout de quatre ans…

La valeur acquise par un placement à intérêts simples au bout de *t* années se calcule donc:

$$C_t = C_0 + I_t = C_0 + C_0 \times i \times t$$

soit $C_t = C_0(1 + i \times t)$

Exemple: en se basant sur l'exemple précédent, on en déduit que le compte épargne sur lequel une somme de 1000 euros serait placée au taux d'intérêt annuel de 5% afficherait un solde de:

- 1050 euros au bout d'un an;
- 1100 euros au bout de deux ans;
- 1150 euros au bout de trois ans;
- 1200 euros au bout de quatre ans;
- …

On observe que la valeur capitalisée d'un placement à intérêts simples se comporte comme une suite arithmétique en fonction du temps et dont la raison vaut $r = C_0 \times i$. En effet, on a $C_t = C_0(1 + i \times t)$ et $C_{t-1} = C_0(1 + i \times (t-1))$, de sorte que $C_t - C_{t-1} = C_0 \times i$ c'est-à-dire $C_t = C_{t-1} + C_0 \times i$.

Il en découle que graphiquement, la valeur acquise au fil du temps est une droite de pente positive $C_0 \times i$.

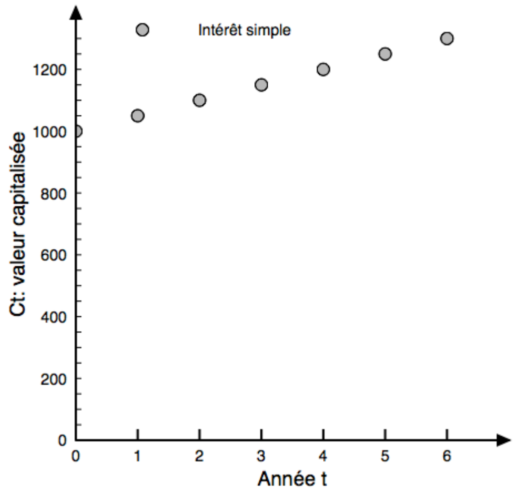

Figure 4 - Valeur acquise au fil du temps par un capital dans un système à intérêts simples (progression arithmétique)

Application des intérêts simples:

Les intérêts simples ne s'appliquent en réalité qu'à des opérations financières de courte durée, inférieure à un an. Pour les placements d'une durée plus longue, c'est le système des intérêts composés (cf. 2.2.2) qui s'applique le plus souvent.

Afin de déterminer des intérêts versés pour des placements de plusieurs jours ou de plusieurs semaines, on procède à la manière de l'exemple suivant, en exprimant la durée du placement comme une fraction de l'année. Lorsque l'on raisonne en mois, on considère qu'une année compte 12 mois. Lorsque l'on raisonne en semaines, on considère qu'une année en compte 52. Lorsque l'on raisonne en jour, on considère le plus souvent qu'une année en compte 360.

Exemple: un individu place 10 000 euros sur un compte rémunéré au taux d'intérêt annuel de 8%. Calculer les intérêts que lui rapporte ce placement s'il laisse son argent:

- 10 jours sur le compte;
- 6 semaines sur le compte;
- 9 mois sur le compte.

Cas de figure 1 - la somme est laissée 10 jours. Sachant qu'une année en compte 360, la durée de 10 jours correspond à $1/36$ d'année. Les intérêts versés au terme de 10 jours se calculent donc $I = 10000 \times 0{,}08 \times \frac{1}{36} \approx 22{,}22$ euros.

Cas de figure 2 - la somme est laissée 6 semaines. Sachant qu'une année en compte 52, la durée de 6 semaines correspond à $3/26 \approx 0{,}115$ année. Les intérêts versés au terme de 6 semaines se calculent donc $I = 10000 \times 0{,}08 \times \frac{3}{26} \approx 92{,}31$ euros.

Cas de figure 3 - la somme est laissée 9 mois. Sachant qu'une année en compte 12, la durée de 9 mois correspond à $3/4$ d'année. Les intérêts versés au terme de 9 mois se calculent donc $I = 10000 \times 0{,}08 \times \frac{3}{6} = 600$ euros.

2.2.2. Intérêts composés

Dans le cas d'intérêts composés, les intérêts rapportés chaque année sont ajoutés au capital de fin d'année, et donnent donc lieu à des versements d'intérêts l'année suivante. Les intérêts versés chaque année sont donc calculés non pas sur la base de la somme initialement placée, comme pour le cas des intérêts simples, mais sur la base du capital atteint à la fin de l'année précédente, et qui incorpore l'ensemble des intérêts versés à cette date.

Plus précisément, si on place une somme d'argent C_0 pendant plusieurs années au taux d'intérêt *i*%:

- Au bout d'un an, le placement donne lieu à un premier versement d'intérêts égal à $C_0 \times i$ et atteint donc la valeur capitalisée de $C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i)$;

- Au bout de deux ans, le placement donne lieu à un second versement d'intérêts égal à $C_1 \times i$ et atteint donc la valeur capitalisée de $C_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1+i)$, or comme $C_1 = C_0(1+i)$, on en déduit que $C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$

Au bout de trois ans, le placement donne lieu à un troisième versement d'intérêts égal à $C_2 \times i$ et atteint donc la valeur capitalisée de $C_3 = C_2 + C_2 \times i = C_2(1+i)$, or comme $C_2 = C_0(1+i)^2$, on en déduit que $C_3 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3$

Exemple: dans ce cas de figure, une somme de 1000 euros placée pendant 10 ans au taux d'intérêt annuel de 5% aura généré en tout:

- 50 euros d'intérêts au bout d'un an;
- 102,5 euros d'intérêts au bout de deux ans;
- 157,625 euros d'intérêts au bout de trois ans;

- 215,5 euros d'intérêts au bout de quatre ans;
- …

On déduit de ce qui précède que:

> La valeur actualisée d'un capital C_0 placé au taux d'intérêt i pendant une durée t dans un système d'intérêts composés s'exprime:
>
> $$C_t = C_0(1+i)^t$$

Comme $C_t = C_0(1+i)^t$ et $C_{t-1} = C_0(1+i)^{t-1}$, on observe que $C_t = C_0(1+i)^{t-1} \times (1+i) = C_{t-1}(1+i)$.

La valeur atteinte d'un capital placé à intérêts composés se comporte donc comme une suite géométrique, de raison $q = 1+i > 1$. La valeur capitalisée d'un placement à intérêts composés est donc croissante au fil du temps, selon un profil géométrique, et non linéaire comme pour un système à intérêts simples.

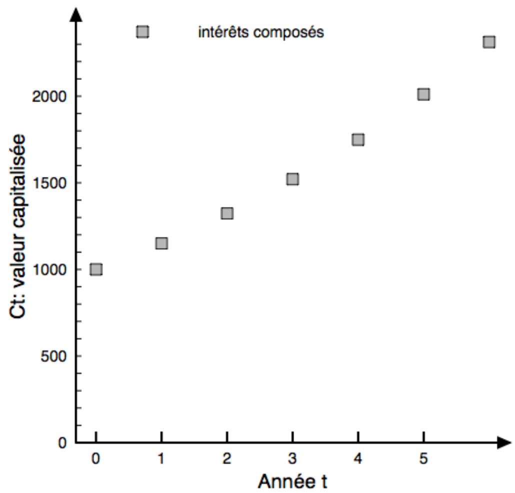

Figure 5 - Valeur acquise au fil du temps par un capital dans un système à intérêts composés (progression géométrique)

2.3. Valeur escomptée et valeur actuelle

On se place ici dans une perspective différente de la sous-section précédente. Il ne s'agit pas ici de connaître à l'avance la valeur future d'une somme actuellement placée contre intérêts (simples ou composés) mais de connaître la valeur actuelle d'une somme future.

On distingue dans ce cadre la valeur escomptée et la valeur actuelle (ou valeur actualisée).

2.3.1. L'escompte commercial

L'escompte commercial est une opération financière fréquente pour une entreprise, qui consiste à céder à un tiers (généralement sa banque) et avant son terme une créance (c'est-à-dire une promesse de paiement) qu'elle détient sur une autre entreprise. Par exemple, les entreprises détiennent souvent des créances sur leurs clients à honorer sous plusieurs semaines. Certaines entreprises préfèrent ne pas attendre que les clients les paient au terme convenu et présentent leurs titres de créances à leur banque, afin de les encaisser, charge à la banque ensuite de percevoir le paiement du client, une fois la créance arrivée à son terme.

Ce service commercial, pratique pour les entreprises qui veulent percevoir leur argent au plus vite et ne pas attendre le terme de l'échéance de la créance, donne droit à la perception d'une rémunération (appelée **intérêt de l'escompte E**) par la banque, que cette dernière déduit de la valeur nominale de la créance. Cette rémunération E est fonction à la fois:

- de la valeur nominale escomptée *Vn* (le montant de la créance);
- de la durée *n,* exprimée comme une fraction d'année, entre la date d'escompte et la date d'échéance de la créance;
- d'un taux d'escompte annuel *i* appliquée par la banque.

$$E = Vn \times n \times i$$

La valeur escomptée *Ve* correspond à la différence entre *Vn*, la valeur nominale de la créance et *E*, le montant de l'intérêt de l'escompte perçu par la banque.

$$Ve = Vn - E$$

Etant donné que l'escompte commercial porte sur des délais relativement courts, et le plus souvent inférieurs à l'année, c'est le système des intérêts simples qui s'applique.

Illustration: une entreprise détient une créance de 3 mois de 15 000 euros sur un client, payable à la date du 30 mai 2016. L'entreprise ne souhaite pas attendre le délai de 3 mois pour encaisser cet argent et aimerait en disposer pour le 31 mars 2016, soit deux mois avant son terme. Pour cela, elle escompte sa créance auprès d'une banque, au taux d'escompte annuel de 10%.

Soit *Vn* la valeur nominale de la créance, *n* la durée (exprimée comme une fraction d'année) entre l'escompte de la créance et son échéance, et *i* le taux d'intérêt annuel d'escompte. L'intérêt de l'escompte E prélevé par la banque se calcule comme suit:

$$E = Vn \times n \times i = 15000 \times \frac{2}{12} \times 0{,}1 = 250$$

La valeur escomptée *Ve* de la créance (c'est-à-dire la somme d'argent perçue par l'entreprise) se calcule alors:

$$Ve = Vn - E = 15000 - 250 = 14750$$

2.3.2. La valeur actuelle

La valeur actuelle d'une somme à payer à une date à venir correspond au **montant qu'il faudrait placer aujourd'hui dans un système d'intérêts composés pour percevoir la même somme d'argent à l'échéance** du placement.

Pour le dire plus clairement, la valeur actuelle d'un paiement de 10 000 euros à réaliser dans 3 ans correspond à la somme d'argent qu'il faudrait placer aujourd'hui sur un compte rémunéré pour que celui-ci donne lieu à perception d'intérêts pendant 3 ans et affiche un solde de 10 000 euros à ce terme.

Soit *S* la somme que l'on cherche à actualiser, *n* le nombre d'années du placement, *i* le taux d'intérêt (ou taux d'actualisation) et *A* la valeur actuelle que l'on cherche à calculer, la formule permettant de calculer *A* est:

$$A = \frac{S}{(1+i)^n}$$

c'est-à-dire $A = S \cdot (1+i)^{-n}$

Exemple 1: en appliquant un taux d'actualisation *i* de 9%, déterminer la valeur actualisée A d'une somme S de 15 000€ qui se réaliserait dans 3 ans.

$$A = \frac{15000}{(1+0,09)^3} \simeq 11582,75$$

On vérifie bien que si l'on place aujourd'hui une somme de 11582,75 euros au taux d'intérêt de 9%, la valeur acquise de ce placement au bout de 3 années sera égale à $11582,75 \times (1+0,09)^3 \simeq 15000$ euros.

Exemple 2: quel capital faut-il placer aujourd'hui au taux d'intérêt de 4% pour obtenir une somme d'argent de 25 000 euros au bout de 5 années?

$$A = \frac{25000}{(1+0,04)^5} \simeq 20548,18$$

Section 3 - Annuités de capitalisation et annuités de remboursement

3.1. L'annuité de capitalisation

La notion d'annuité de capitalisation vise à résoudre le type de question suivant: supposons qu'une personne capitalise (verse) chaque année, pendant *n* années, une même somme d'argent S sur son compte épargne rémunéré au taux d'intérêt annuel de *i*%. Quelle est la somme d'argent créditée sur son compte courant à l'année *n*?

Pour répondre à cette question, il est utile de raisonner de la manière suivante:

- La somme d'argent placée la dernière année (année n) vaut S, faute d'avoir rapporté des intérêts.
- La somme d'argent placée l'avant-dernière année (année n-1), et restée 1 année sur le compte, vaut $S(1+i)$, en raison des intérêts rapportés.
- …
- La somme d'argent placée l'année 3, et restée n-3 années sur le compte, vaut $S(1+i)^{n-3}$, en raison des intérêts produits sur cette période.
- La somme d'argent placée la seconde année, et restée n-2 années sur le compte, vaut $S(1+i)^{n-2}$, en raison des intérêts produits sur cette période.
- La somme d'argent placée la première année, et restée n-1 années sur le compte, vaut $S(1+i)^{n-1}$, en raison des intérêts produits sur cette période.

Au final, la somme totale C d'argent créditée sur le compte se calcule:

$$C = S + S(1+i) + S(1+i)^2 + ... + S(1+i)^{n-2} + S(1+i)^{n-1}$$

$$\text{soit } C = \sum_{t=0}^{n-1} S(1+i)^t$$

On reconnait là la somme de *n* termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison *q* est égale à (1+i). D'après la section 1 de ce chapitre, on peut réécrire *C* sous la forme:

$$C = S\left(\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right)$$

ou encore $C = S\left(\dfrac{1-(1+i)^n}{-i}\right)$

soit $C = S\left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$

D'où la formule:

Soit S le versement annuel effectué sur le compte, i le taux d'intérêt qui s'applique et n le nombre de versements effectués, la valeur acquise C par ces versements au bout du *n-ième* versement se calcule

$$C = S\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Exemple:

Supposons qu'une personne verse chaque année 500 euros sur un compte épargne rémunéré au taux d'intérêt annuel de 5%. Quelle est la valeur créditée sur ce compte au bout du 6ème versement?

Réponse: $$C = 500\left(\frac{(1+0,02)^6 - 1}{0,02}\right) \simeq 3154,1$$

3.2. L'annuité de remboursement

La notion d'annuité de remboursement vise à répondre à la question suivante, réciproque de la sous-section précédente. Sachant qu'une personne souhaite, pour financer un achat, emprunter une somme d'argent pendant n années au taux d'intérêt annuel i et ne peut rembourser que S euros chaque année. Quelle somme d'argent initiale peut-elle emprunter au maximum?

Pour répondre à ce problème, il convient de raisonner de la façon suivante, un peu compliquée de prime abord.

Appelons C le montant total, appelé capital, que la personne emprunte initialement et qu'elle s'engage à rembourser progressivement, en n années, en versant à la fin de chaque année d'emprunt une somme d'argent égale à S.

Comme la personne emprunte la somme C et s'engage à la rembourser progressivement en n années, elle réalisera pour cela n paiements fixes, de S euros, à la fin de chaque année. La somme S que la personne verse chaque année couvre deux éléments:

- d'une part elle paye les intérêts dus au prêteur au titre du capital mis à sa disposition au début de l'année en question;
- D'autre part, elle rembourse une partie du capital mis à sa disposition au début de l'année, de sorte que chaque année, le capital restant du diminue.

Ainsi, le paiement réalisé au terme de la première année (année 1) couvre d'une part les intérêts à payer au titre d'avoir eu à disposition une somme C_1, égale à C dans le cas présent, au début de la période. Ces intérêts au titre de la première année valent $I_i = C_1 \times i = C \times i$. Le reste de paiement ($S - I_1$) rembourse au préteur une partie de l'argent mis à disposition (C_1) au début de l'année 1, de sorte que le capital restant du au début de la période suivante vaut $C_2 = C_1 - (S - C_1 \times i)$, c'est-à-dire $C - (S - C \times i)$ ou $C_2 = C(1+i) - S$.

Le paiement réalisé au terme de la seconde année (année 2) couvre d'une part les intérêts à payer au titre d'avoir eu à disposition une somme $C_2 = C(1+i) - S$, au début de la période. Ces intérêts au titre de la première année valent $I_2 = C_2 \times i = (C(1+i) - S) \times i$. Le reste de paiement ($S - I_2$) rembourse au préteur une partie de l'argent mis à disposition (C_2) au début de l'année 1, de sorte que le capital restant du au début de la période suivante vaut $C_3 = C_2 - (S - C_2 \times i)$. En remplaçant C_2 par sa valeur $C(1+i) - S$, on obtient que $C_3 = C(1+i)^2 - S(1+i) - S$.

En procédant de la sorte pour chacune des périodes suivantes, on aboutit au fait qu'au début de la dernière période:

- Le capital restant du vaut $C_n = C(1+i)^{n-1} - S(1+i)^{n-2} - S(1+i)^{n-3} - ... - S(1+i) - S$ soit $C_n = C(1+i)^{n-1} - \sum_{t=0}^{n-2} S(1+i)^t$
- Les intérêts payés au titre de cette année vaut $C_n \times i$
- La différence (soit $S - C_n \times i$) entre le paiement S et les intérêts payés couvre l'ensemble du capital restant du C_n, de sorte que l'emprunt initial est totalement remboursé.

La dernière condition signifie que $S - C_n \times i = C_n$, que l'on peut réexprimer $S = C_n(1+i)$ soit encore $C_n = \frac{S}{1+i}$.

Si l'on remplace C_n par $\frac{S}{1+i}$ dans l'expression $C_n = C(1+i)^{n-1} - \sum_{t=0}^{n-2} S(1+i)^t$, on obtient $\frac{S}{1+i} = C(1+i)^{n-1} - \sum_{t=0}^{n-2} S(1+i)^t$

En multipliant de part et d'autre cette dernière expression par 1+i, on obtient:

$S=C(1+i)^{n-1}\times(1+i)-(1+i)\times\sum_{t=0}^{n-2}S(1+i)^{t}$ qui s'écrit également $S=C(1+i)^{n}-\sum_{t=0}^{n-2}S(1+i)^{t+1}$. Comme S est une constante, indépendante de t, on peut écrire que $\sum_{t=0}^{n-2}S(1+i)^{t+1}=S\times\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}$.

L'expression $S=C(1+i)^{n}-\sum_{t=0}^{n-2}S(1+i)^{t+1}$ s'écrit alors $S=C(1+i)^{n}-S\times\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}$. En factorisant par rapport à S, on obtient $S\left(1+\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}\right)=C(1+i)^{n}$. En outre, comme $\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}$ est une somme de n-1 termes successifs d'une suite géométrique de raison q=1+i, on peut réécrire que $\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}=(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{n-1}}{1-(1+i)}\right)=(1+i)\left(\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}\right)=\frac{(1+i)^{n}-(1+i)}{i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-1$

$S\left(1+\sum_{t=0}^{n-2}(1+i)^{t+1}\right)=C(1+i)^{n}$ s'écrit alors $S\left(1+\frac{(1+i)^{n}-1}{i}-1\right)=C(1+i)^{n}$. On en déduit alors la formule permettant de calculer la valeur C, initialement prétée:

$$C=S\frac{\left(\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right)}{(1+i)^{n}}$$

qui se simplifie

$$C=S\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

D'où la formule suivante:

Soit *S* le montant fixe des annuités de remboursement, *i* le taux d'intérêt d'emprunt et *n* la durée du remboursement de l'emprunt, le capital *C* que l'on peut emprunter dans ces conditions se calcule

$$C=S\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

<u>Remarque</u>: seule la formule finale est à retenir. On remarquera au passage la ressemblance, mais également la différence de cette formule avec celle de la sous-section 2.5.

Exemple 1: quelle somme peut emprunter au taux d'intérêt de 3% une personne qui souhaite rembourser son emprunt en 6 ans et en versant à la fin de chaque année une annuité annuelle de 10 000 euros?

Réponse: $C = 10000 \times \dfrac{1-(1+0{,}03)^{-6}}{0{,}03} \simeq 54171{,}9$ euros.

Exemple 2: en combien d'années une personne peut-elle rembourser un emprunt initial de 180 000 euros sachant qu'elle paie un taux d'intérêt annuel de *1,85*% et verse des annuités annuelles constantes de 15 000 euros?

Réponse:

$$\begin{aligned}
& 180000 = 15000 \times \frac{1-(1+0{,}02)^{-n}}{0{,}02} \\
& \Leftrightarrow 12 = \frac{1-(1+0{,}0185)^{-n}}{0{,}02} \\
& \Leftrightarrow 0{,}24 = 1-(1+0{,}0185)^{-n} \\
& \Leftrightarrow (1+0{,}02)^{-n} = 0{,}76 \\
& \Leftrightarrow \ln\left((1+0{,}0185)^{-n}\right) = \ln 0{,}76 \\
& \Leftrightarrow -n \times \ln 1{,}0185 = \ln 0{,}76 \\
& \Leftrightarrow n = -\frac{\ln 0{,}76}{\ln 1{,}0185} \approx 15
\end{aligned}$$

Il faudra à peu près 15 années pour rembourser un tel emprunt.

Formulaire Chapitre 4 – Quelques notions de mathématiques financières

Partie 1 - Les suites numériques

Propriétés des suites arithmétiques

1. Forme de la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$
2. Forme générique : $u_n = u_0 + r \times n$
3. Relation entre un terme de rang *n* et un terme de rang *p*: $u_n = u_p + r \times (n-p)$
4. Somme de termes successifs, allant du rang *p* au rang *n* :
$$\sum_{i=p}^{n} u_i = (n+1-p)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$$

Propriétés des suites géométriques

1. Forme de la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \times q$
2. Forme générique : $u_n = u_0 \times q^n$
3. Relation entre un terme de rang *n* et un terme de rang *p*: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
4. Somme de termes successifs d'une suite géométrique de raison *q*, allant du rang *p* au rang *n* :
$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p\left(\frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}\right)$$

Partie 2 – Mathématiques financières

Valeur acquise

1. Dans un **système d'intérêts simples,** la valeur acquise (C_t) par une somme C_0 placée pendant *t* années au taux d'intérêts de *i*% se calcule
$$C_t = C_0(1 + i \times t)$$
2. Dans un **système d'intérêts composés,** la valeur acquise (C_t) par une somme C_0 placée pendant *t* années au taux d'intérêts de *i*% se calcule
$$C_t = C_0(1+i)^t$$

Valeur escomptée (raisonnement en termes d'intérêts simples)

Soit *Vn* la valeur nominale escomptée (le montant de la créance);
Soit *n,* exprimée comme une fraction d'année, la durée entre la date d'escompte et la date d'échéance de la créance ;
Soit *i* le taux d'escompte annuel

1. Le **montant de l'escompte** se calcule $E = Vn \times n \times i$
2. La **valeur escomptée** de la créance se calcule $Ve = Vn - E$

Valeur actuelle (raisonnement en termes d'intérêts composés)

Soit *S* la somme que l'on cherche à actualiser, *n* le nombre d'années du placement, *i* le taux d'intérêt (ou taux d'actualisation) et *A* la **valeur actuelle (ou valeur actualisée)** que l'on cherche à calculer, la formule permettant de calculer *A* est:
$$A = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Annuités de capitalisation :

Soit *S* le versement annuel effectué sur le compte, *i* le taux d'intérêt qui s'applique et *n* le nombre de versements effectués, la **valeur acquise** *C* par ces versements au bout du *n-ième* versement se calcule
$$C = S\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Annuités de remboursement :

Soit *S* le montant fixe des annuités de remboursement, *i* le taux d'intérêt d'emprunt et *n* la durée du remboursement de l'emprunt, le capital *C* que l'on peut emprunter dans ces conditions se calcule
$$C = S \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Faculté de Droit, d'Economie, Gestion et A.E.S
Année Universitaire 2015-2016

Mathématiques
Durée : **2h**
Semestre : semestre 2
Session : 1ère session

1ère année Licence AES
Julien Hay (Brest)

Sans document

Seules sont autorisées les calculatrices sans mémoire, ni graphique. Pas de montres connectées.

Mathématiques

Conseils : pensez à bien gérer votre temps. Veillez à être précis(e), clair(e) et soigné(e) dans votre rédaction. Tout résultat non démontré ne sera pas considéré comme valide.

Exercice 1 (2 points)

Deux pâtissiers s'approvisionnent auprès d'un même fournisseur. Le premier pâtissier passe commande de 12 kilogrammes de fraises et 3 kilogrammes de chocolat, et est facturé de 153 euros. Le second pâtissier passe commande de 7 kilogrammes de fraises et 18 kilogrammes de chocolat et est facturé de 333 euros.

Déterminer le prix d'un kilogramme de fraises et le prix d'un kilogramme de chocolat pratiqués par le fournisseur. Pour cela, vous pourrez mobiliser vos connaissances en système d'équations linéaires à deux inconnues, en désignant par exemple par x le prix d'un kilogramme de fraises et par y celui d'un kilogramme de chocolat.

Exercice 2 (2 points)

Déterminer les racines de l'équation suivante :

$$(x+4)(x-4)-(2x+3)(x+4)=0$$

Exercice 3 (5 points)

Soit la fonction $$f(x) = 2 - \frac{2}{3x^2}$$

Question 1 - Préciser le domaine de définition de f

Question 2 - Etudier sa parité

Question 3 - Exprimer sa dérivée première $f'(x)$ et sa dérivée seconde $f''(x)$ par rapport à x

Question 4 - A partir des résultats de la question 3, établir si la fonction est croissante, décroissante ou stationnaire en $x = -7$, puis en $x = 3$.

Question 5 - A partir des résultats de la question 3, établir si la fonction est concave ou convexe en $x = -2$, puis en $x = 1$.

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction de coût total d'une entreprise $CT(q) = 2q^3 - 12q^2 + 225q$, avec q qui désigne le volume de production de l'entreprise.

Question 1 – Déterminer la fonction de coût moyen $CM(q)$ de l'entreprise.

Question 2 – Déterminer la quantité q qui minimise le coût moyen $CM(q)$ de l'entreprise.

Question 3 – Déterminer la fonction de coût marginal $Cm(q)$ de l'entreprise

Question 4 – Déterminer la quantité q pour laquelle le coût moyen $CM(q)$ de l'entreprise est égal au coût marginal $Cm(q)$.

Exercice 5 (2 points)

Soit q le volume de production d'une entreprise. Le chiffre d'affaires (ou recettes totales) de l'entreprise est une fonction de ce volume et s'exprime $RT(q) = 96q - 3q^2$. Le coût total de production est également une fonction de q et s'exprime $CT(q) = q^2 + 16q + 72$.

Question 1 – Déterminer le volume de production q qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise.

Question 2 – Déterminer le volume de production q qui maximise le profit (la différence entre le chiffre d'affaires et le coût total) de l'entreprise.

Exercice 6 (2 points)

Jean et Matthieu reçoivent chacun respectivement 250 euros et 300 euros d'étrennes à Noël, de la part de leurs grands-parents. Jean place cet argent sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de 4,4%. Matthieu place quant à lui son argent sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de 2%.

Au bout de combien d'années, **dans un système d'intérêts simples**, l'argent placé par Jean aura-t-il acquis plus de valeur que l'argent placé par Matthieu ?

Exercice 7 (2 points)

Une personne vous propose de choisir entre les trois propositions suivantes :

1. Elle vous verse 2000 euros d'un coup et sans attendre, c'est-à-dire en mai 2016 ;
2. Elle vous verse chaque année, au mois de mai, une somme 300 euros, et ce de 2016 à 2025 (soit 10 versements) ;
3. Elle vous verse 4500 euros d'un coup, mais seulement en mai 2025.

Quelle est l'alternative qui permet d'avoir le plus d'argent en mai 2025, sachant que vous avez la possibilité de placer de l'argent sur un compte épargne rémunéré au taux d'intérêt annuel de 10%, **dans un système d'intérêts composés**.

Précision *: Vous noterez au passage qu'une somme d'argent placée sur un compte épargne de mai 2016 à mai 2025 sera restée 9 années sur ce compte.*

Exercice 8 (1 point)

Un ménage souhaite envisage d'acheter un nouveau véhicule dans 5 ans, d'une valeur de 18 000 euros. Plutôt que d'emprunter de l'argent le moment de l'achat venu, il préfère mettre de l'argent de côté en attendant, en versant au début de chaque année une somme fixe S sur un compte épargne rémunéré au taux d'intérêt annuel de 4,5%, dans un **système d'intérêts composés**.

Quelle somme d'argent S doit-il verser chaque année pour que son compte épargne affiche un solde de 18 000 euros au début de la $5^{\text{ème}}$ année (soit au lendemain du cinquième -et dernier- versement), année d'achat du véhicule ?

UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Faculté de Droit, d'Economie, Gestion et A.E.S
Année Universitaire 2015-2016

Mathématiques
Durée : **1h30**

1ère année Licence AES
Julien Hay (Brest)

Semestre : semestre 2

Session : 2ème session

Sans document

Seules sont autorisées les calculatrices sans mémoire, ni graphique. Pas de montres connectées.

Mathématiques

Conseils : pensez à bien gérer votre temps. Veillez à être précis(e), clair(e) et soigné(e) dans votre rédaction. Tout résultat non démontré ne sera pas considéré comme valide.

Exercice 1 (2 points)

Vérifier, sans utiliser de calculatrice, que la valeur de l'expression $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ est un nombre entier.

Exercice 2 (1 point) – Calculer la valeur de l'expression suivante :

$$\sum_{i=2}^{25} i$$

Indication concernant l'exercice 2 : vous pourrez, si vous le jugez préférable, utiliser les propriétés des suites arithmétiques

Exercice 3 (2 points) - Résoudre l'inéquation suivante :

$$7x - 4 < 5x + 2$$

Exercice 4 (2 points) – Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3y + 5x = 29 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases}$$

Exercice 5 (5 points) – Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Question 1 – Quel est son domaine de définition ?

Question 2 – Calculer la dérivée première de la fonction. En déduire le sens de variation de la fonction $f(x)$ lorsque $x > 0$.

Question 3 – Calculer la dérivée seconde de la fonction. En déduire si la fonction $f(x)$ est concave ou convexe lorsque $x > 0$.

Exercice 6 (4 points) – On suppose que le profit total (PT) d'une entreprise est une fonction de son volume de production (q), selon la relation :

$$PT(q) = -2q^2 + 32q - 10$$

Question 1 –Déterminer la fonction de profit moyen $PM(q)$

Question 2 – Déterminer la fonction de profit marginal $Pm(q)$

Question 3 – Déterminer la valeur de la production qui maximise le profit total de l'entreprise.

Exercice 7 (2 points)

Vous avez placé 500 euros sur un compte épargne, rémunéré au taux d'intérêt annuel de 4%.

Question 1 - Quel est le solde affiché sur ce compte au bout de 5 ans dans un système d'intérêts simples ?

Question 2 - Quel est le solde affiché sur ce compte au bout de 5 ans dans un système d'intérêts composés?

Exercice 8 (2 points)

Vous versez au début de chaque année 500 euros sur un compte épargne, rémunéré au taux d'intérêt annuel de 4%. Quel est le solde affiché sur ce compte au début de la 5$^{\text{ème}}$ année (au lendemain du 5$^{\text{ème}}$ versement), dans un système d'intérêts composés ?