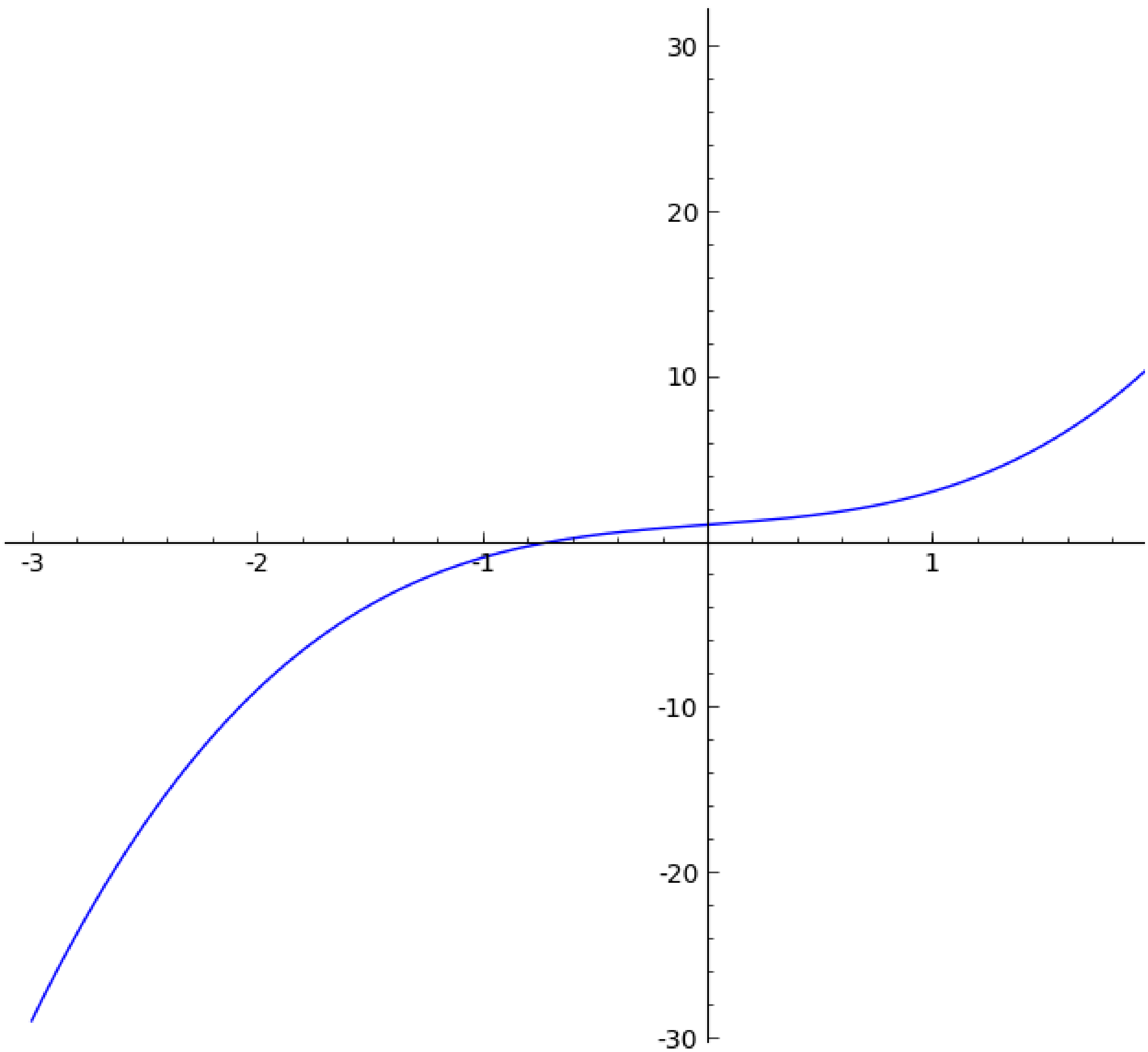
Résolution d'une équation cubique réelle - le cas d'une racine réelle

Le but de cette page de calcul est de montrer comment on peut résoudre, grâce à Tartaglia, une équation cubique qui a exactement une solution réelle. Commençons par une équation explicite qu'on voudrait résoudre dans $\mathbf{R}$:

$$x^3 + x + 1 = 0.$$

Une petite étude de la fonction $y = x^3 + x + 1$ montre que cette équation possède bien une seule racine réelle. Voici le graphe de la fonction:

```
plot(x^3+x+1,(x,-3,3))
```



On commence par substituer $x = u + v$ dans l'expression $x^3 + x + 1$. Ici, on se heurte à une petite particularité de sage. Avant de pouvoir utiliser des inconnues comme u et v, il faut les déclarer. Ca se fait en effectuant la procédure **var** sur la chaîne de caractères $'\mathtt{u}'$, comme ceci:

```
var('u')
```

u

...et de même pour v:

```
var('v')
```

v

Maintenant on est prêt pour la substitution de $u + v$ pour x:

```
(x^3+x+1).subs(x=u+v)
```

$$(u + v)^3 + u + v + 1$$

Remarquons qu'on voit ici le caractère objet-orienté de python, le langage de programmation sur lequel sage est basé. Des objets comme $\mathtt{x}^3 + \mathtt{x} + 1$ possèdent des méthodes comme `subs()`. On évalue une méthode en un objet en écrivant `objet.méthode`. Ici, cela donne `(x^3 + x + 1).subs(x = u + v)` car la méthode `subs()` prend l'argument `x = u + v`. Bref, on développe l'expression ci-dessus, et on obtient:

```
_.expand()
```

$$u^3 + 3\,u^2 v + 3\,uv^2 + v^3 + u + v + 1$$

Remarquons que le signe $'\_'$ signifie «la dernière valeur calculée» en l'occurence $(u + v)^3 + u + v + 1$. En regardant de près, on voit que l'expression ci-dessus est égale à $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 1) + 1$, et en effet:

```
(_-(u^3+v^3+(u+v)*(3*u*v+1)+1)).expand()
```

0

L'idée de génie de Tartaglia était de supposer que $3uv + 1 = 0$, i.e, que $uv = -1/3$ ou encore que $v = -1/(3u)$. Cela simplifie considérablement l'expression $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv - 3) + 1$. Substituons donc $v = -1/(3u)$ dans cette expression:

```
(u^3 + 3*u^2*v + 3*u*v^2 + v^3 + u + v + 1).subs(v=-1/(3*u))
```

$$u^3 - \frac{1}{27\,u^3} + 1$$

Multiplions par u^3:

```
(_*u^3).expand()
```

$$u^6 + u^3 - \frac{1}{27}$$

C'est une expression quadratique en u^3! Pour résumer, si $x^3 + x + 1 = 0$ et si on pose $x = u + v$ et $v = -1/(3u)$, on a que u^3 est solution de l'équation quadratique $y^2 + y - 1/27 = 0$. Or, les solutions de cette dernière sont:

```
y1=(-1+sqrt(31/27))/2; y2=(-1-sqrt(31/27))/2
```

comme on peut vérifier:

```
(y1^2+y1-1/27).expand()
```

$$0$$

```
(y2^2+y2-1/27).expand()
```

$$0$$

Si on pose $u_1 = \sqrt[3]{y_1}$, $v_1 = -1/(3u_1)$ et $x_1 = u_1 + v_1$, on a une solution réelle de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$:

```
u1=y1^(1/3); v1=-1/(3*u1); x1=u1+v1
```

```
x1
```

$$\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

On a bien une racine de l'équation $x^3 + x + 1$. En effet, substituons x_1 pour x dans l'expression $x^3 + x + 1$:

```
(x^3+x+1).subs(x=x1)
```

$$\frac{1}{27}\left(3\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{}{3\left(\frac{1}{6}\sqrt{\right.}\right.}$$

Développons:

```
_.expand()
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}} - \frac{2}{9\left(\sqrt{\frac{31}{3}}-3\right)} + \frac{1}{2}$$

Simplifions:

```
_.simplify()
```

$$\frac{1}{18}\sqrt{31}\sqrt{3} - \frac{2}{3\left(\sqrt{31}\sqrt{3}-9\right)} + \frac{1}{2}$$

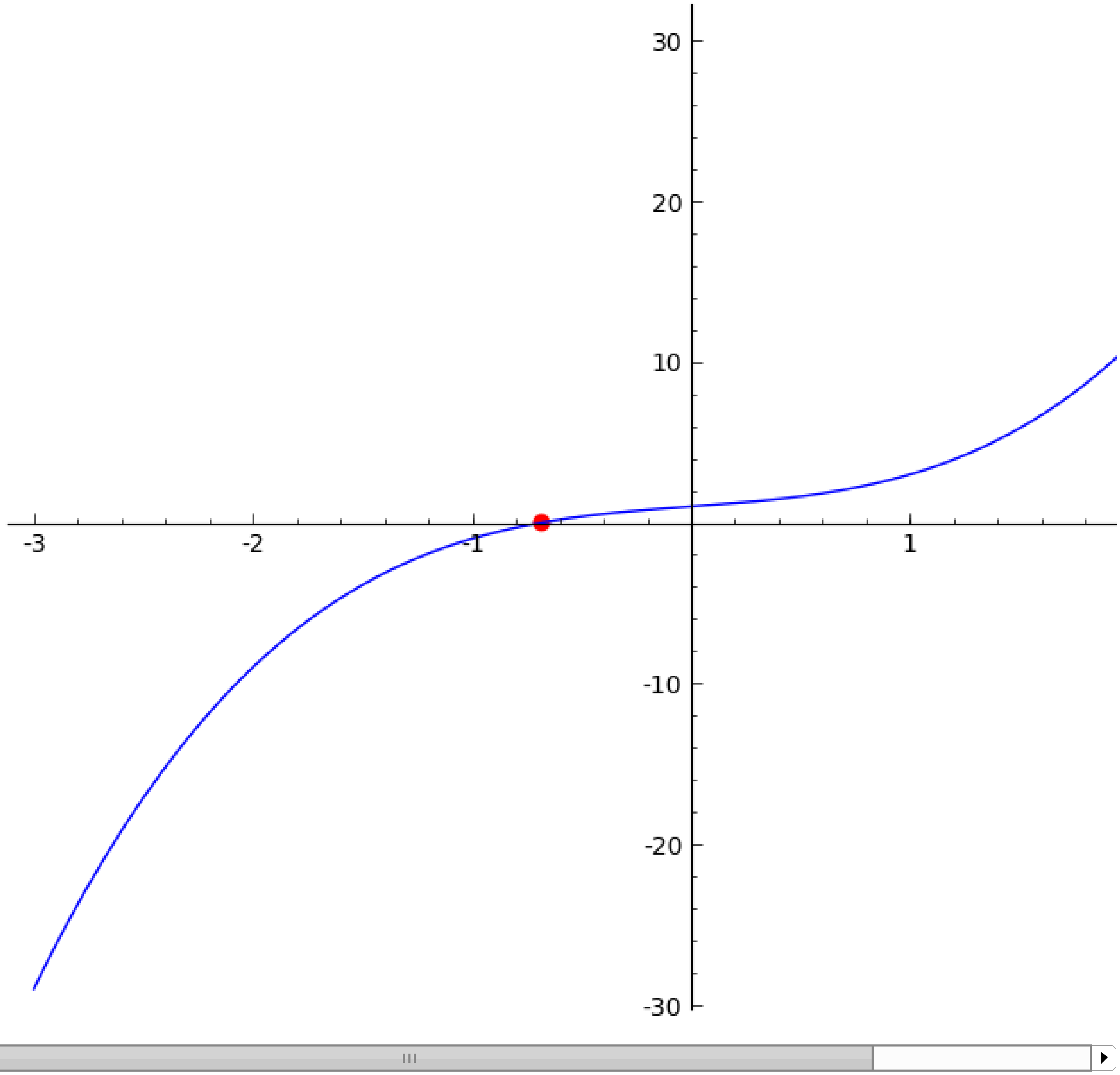
Simplifions les expressions radicales, i.e., $(\sqrt{3}-9)(\sqrt{3}+9) = 3-81$, etc.:

```
_.simplify_radical()
```

$$0$$

On a donc bien trouvé une racine réelle de l'équation $x^3+x+1=0$. Faisons un petit dessin

```
G = plot(x^3+x+1,(x,-3,3)) + point((x1,0),size=50,color='red')
G.show()
```



On a bien trouvé une racine réelle! Qu'en est-il des racines dans $\mathbf{C}$? Dans $\mathbf{C}$, il y a 3 racines cubiques de y_1 :

```
u1=u1; u2=u1*exp(2*I*pi/3); u3=u1*exp(4*I*pi/3)
```

Posons donc $v_i = -1/(3u_i)$:

```
v1=-1/3/u1; v2=-1/3/u2; v3=-1/3/u3
```

et $x_i = u_i + v_i$:

```
x1=u1+v1; x2=u2+v2; x3=u3+v3
```

Vérifions que les nombres complexes x_1, x_2, x_3 sont bien solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$:

```
(x^3+x+1).subs(x=x1)
```

$$\frac{1}{27}\left(3\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{3}+\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\quad}{3\left(\frac{1}{6}\sqrt{3\right.}}$$

```
_.expand()
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}-\frac{2}{9\left(\sqrt{\frac{31}{3}}-3\right)}+\frac{1}{2}$$

```
_.simplify_radical()
```

$$0$$

sans surprise car on l'avait déjà vérifié ci-dessus. On a de même pour x_2 et x_3:

```
(x^3+x+1).subs(x=x2).expand().simplify_radical()
```

$$0$$

```
(x^3+x+1).subs(x=x3).expand().simplify_radical()
```

$$0$$

Voici donc les racines complexes de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$:

```
x1.simplify_radical()
```

$$-\frac{\sqrt{3}2^{\frac{2}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{6\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

```
x2.simplify_radical()
```

$$\frac{\sqrt{3}2^{\frac{2}{3}}\left(\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(i\sqrt{3}-1\right)+i\sqrt{3}2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)}{12\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

```
x3.simplify_radical()
```

$$-\frac{\sqrt{3}2^{\frac{2}{3}}\left(\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(i\sqrt{3}+1\right)+i\sqrt{3}2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}\right)}{12\left(\sqrt{31}-3\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

On a bien trouvé toutes les racines car

```
bool((x-x1)*(x-x2)*(x-x3)==x^3+x+1)
```

True

Dans le plan complexe, les nombres x_1, x_2, x_3 se situent ainsi:

```
S = point((x1,0),size=50,color='red') +
point((x2.real(),x2.imag()),size=50,color='green') +
point((x3.real(),x3.imag()),size=50,color='blue')
S.show(figsize=6)
```