Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Partiel mi-semestre, le 19 octobre 2013, 10h00-11h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(3 pts)** Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = -4 + 4 = 0.$$

Une racine carrée de Δ est donc $\delta = 0$. Du coup, l'équation $w^2 + 2i\,w - 1 = 0$ ne possède qu'une seule solution à savoir

$$w_1 = \frac{-2i \pm 0}{2} = -i.$$

b. **(4 pts)** Comme $i^2 = -1$, on a $i^3 = -i$. Une racine cubique de $-i$ est donc $u_1 = i$. Du coup, les autres racines cubiques de $-i$ sont ij et ij^2, avec $j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $j^2 = \overline{j}$. On obtient

$$\begin{aligned} u_1 &= i \\ u_2 &= i(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i \\ u_3 &= i(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i \end{aligned}$$

c. **(5 pts)** Supposons que $z^3 + 3\,z + 2i = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$. Substitons $z = u + v$, on obtient

$$u^3 + 3\,u^2v + 3\,uv^2 + v^3 + 3\,u + 3\,v + 2i = 0.$$

En supposant que $uv = -1$ ou encore que $v = -1/u$, on obtient

$$u^3 - \frac{1}{u^3} + 2i = 0.$$

Multiplions par u^3 :

$$u^6 + 2i\,u^3 - 1 = 0.$$

Il s'ensuit que u^3 est solution de l'équation du a. Du coup, u est l'une des racines cubiques u_1, u_2, u_3 de w_1 du b. Posons

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-1}{u_1} = -\overline{u_1} = i = u_1, \\ v_2 &= \frac{-1}{u_2} = -\overline{u_2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i = u_3, \\ v_3 &= \frac{-1}{u_3} = -\overline{u_3} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i = u_2. \end{aligned}$$

Du coup, les solutions de l'équation cubique sont

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + v_1 = 2i, \\ z_2 &= u_2 + v_2 = u_2 + u_3 = -i, \\ z_3 &= u_3 + v_3 = u_3 + u_2 = -i. \end{aligned}$$

Exercice 2. a. **(3 pts)** Comme $\exp(\frac{1}{6}i\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, on a

$$a = 2(\sqrt{3}-3)e^{\frac{1}{6}i\pi} = (\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+i) = (3-3\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}).$$

Comme $\exp(-\frac{2}{3}i\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, on a

$$\begin{aligned} b = 4(\sqrt{3}-1)e^{-\frac{2}{3}i\pi} &= 2(\sqrt{3}-1)(-1-i\sqrt{3}) = \\ &-2(\sqrt{3}-1) - 2i(\sqrt{3}-1)\sqrt{3} = (2-2\sqrt{3}) + i(-6+2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Comme $\exp(\frac{3}{4}i\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, on a

$$c = 4\sqrt{6}e^{\frac{3}{4}i\pi} = 2\sqrt{6}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}) = -4\sqrt{3} + 4i\sqrt{3}.$$

b. **(3 pts)** D'après le cours, 3 nombres complexes a, b, c distincts sont alignés si et seulement si le nombre complexe $(c-a)/(b-a)$ est réel. Or, d'après le a

$$\begin{aligned} c - a = -4\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} &- (3-3\sqrt{3}) - i(-3+\sqrt{3}) = \\ &(-3-\sqrt{3}) + i(3+3\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b - a = (2-2\sqrt{3}) + i(-6+2\sqrt{3}) &- (3-3\sqrt{3}) - i(-3+\sqrt{3}) = \\ &(-1+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Du coup, le quotient

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

est bien réel.

c. **(2 pts)** On a

$$\begin{aligned} a^{12} &= (2\sqrt{3}-6)^{12}e^{2i\pi} = (2\sqrt{3}-6)^{12}, \\ b^{12} &= (4\sqrt{3}-4)^{12}e^{-4i\pi} = (4\sqrt{3}-4)^{12}, \text{ et} \\ c^{12} &= (4\sqrt{6})^{12}e^{9i\pi} = -(4\sqrt{6})^{12}. \end{aligned}$$

On constate que les 3 nombres complexes a^{12}, b^{12}, c^{12} sont tous réels et donc alignés dans $\mathbb{C}$.