Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal 2nd session, le 10 juin 2013, 8h30-11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer le Lemme de Gauss et le démontrer (on pourra admettre le Théorème de Bézout).

Exercice 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 5\,z + i + 7 = 0.$$

b. Résoudre l'équation

$$z^3 - (i+6)\;z^2 + (6i+12)\;z - 8i - 6 = 0$$

dans $\mathbb{C}$ en sachant que $1+i$ en est une solution.

Exercice 2. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$. Considérons les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
(A) &: \exists p \in \mathcal{P} \colon \forall q \in \mathcal{P} \colon q \geq p \\
(B) &: \exists q \in \mathcal{P} \colon \forall p \in \mathcal{P} \colon q \geq p \\
(C) &: \forall p \in \mathcal{P} \colon \exists q \in \mathcal{P} \colon q \geq p \\
(D) &: \forall q \in \mathcal{P} \colon \exists p \in \mathcal{P} \colon q \geq p
\end{aligned}$$

a. L'assertion A et-elle vraie ? Si oui, la démontrer. Sinon en donner un contre-exemple.
b. Même question pour l'assertion B.
c. Même question pour C.
d. Idem pour D.

Exercice 3. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $f\colon E \to E$ l'application ensembliste définie par

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3.$$

a. Montrer que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
b. En déduire que f admet une application réciproque.
c. En déduire que f est bijective.

T. S. V. P.

Exercice 4. Soit R la relation sur l'ensemble $\mathbb{R}$ définie par

$$xRy \Leftrightarrow e^{ix} = e^{iy} \text{ dans } \mathbb{C}.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Supposons que a et b ont même reste dans la division euclidienne par 2013. Montrons que les entiers relatifs a^{1789} et b^{1789} ont même reste dans la division euclidienne par 2013.

Exercice 6. Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si oui, le montrer. Sinon, en donner une décomposition.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4.$$

a. Effectuer la division euclidienne de P par le polynôme $X^2 - 2X + 1$.
b. Déterminer la factorisation de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
c. Décomposer la fraction rationnelle $1/P$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	4 pt
Exercice 2	2 pt
Exercice 3	2 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	2 pt
Exercice 6	2 pt
Exercice 7	4 pt