Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 10 janvier 2008, 8h30–11h30

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. On peut extraire une suite convergente **(1 pt)** de toute suite de nombres réels bornée **(1 pt)**.

Exercice 1. a. Supposons que g n'est pas injective et que f est surjective. Comme g n'est pas injective, il existe $y, y' \in F$ avec $y \neq y'$ et $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Du coup, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ et $x \neq x'$ car $f(x) = y \neq y' = f(x')$. Par conséquent, $g \circ f$ n'est pas injective **(1 pt)**.

b. Soit $E = \emptyset$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{1\}$. Soient $f\colon E \to F$ l'unique application de E dans F et $g\colon F \to G$ l'unique application de F dans G. Il est clair que g n'est pas injective et que $g \circ f$ est bien injective **(1 pt)**.

Exercice 2. a. On a

$$\begin{aligned}(3+4i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times 4i + 3 \times 3 \times (4i)^2 + (4i)^3 = \\ 27 + 108i - 144 - 64i = -117 + 44i \quad \textbf{(1 pt)}.\end{aligned}$$

b. On détermine d'abord une racine carrée α de $3 + 4i$ par la méthode du cours. Comme $|3 + 4i| = 5$, une racine carrée de α est

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(3+5)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(-3+5)} = 2 + i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'après le a,

$$117 - 44i = -(3+4i)^3 = i^2 \cdot (\alpha^2)^3 = (i\alpha^3)^2.$$

Une racine carrée de $117 - 44i$ est donc

$$\begin{aligned}i\alpha^3 = i(2+i)^3 = i(2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3) = \\ i(8 + 12i - 6 - i) = i(2 + 11i) = -11 + 2i \quad \textbf{(1 pt)}.\end{aligned}$$

Exercice 3. a. On effectue l'algorithme d'Euclide étendu pour déterminer u et v :

i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	u_i	v_i
-1					1	0
0					0	1
1	3185	1925	1	1260	1	-1
2	1925	1260	1	665	-1	2
3	1260	665	1	595	2	-3
4	665	595	1	70	-3	5
5	595	70	8	35	26	-43
6	70	35	2	0		

Le pgcd de a et b est donc égal à 35, et on peut prendre $u = 26$ et $v = -43$ **(1 pt)**.

b. Comme $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$, on détermine $\text{pgcd}(35, 1001)$ et on détermine $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $r \times 35 + s \times 1001 = \text{pgcd}(35, 1001)$.

i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	u_i	v_i
-1					1	0
0					0	1
1	1001	35	28	21	1	-28
2	35	21	1	14	-1	29
3	21	14	1	7	2	-57
4	14	7	2	0		

Du coup, $\text{pgcd}(35, 1001) = 7$ et $r = -57$ et $s = 2$ conviennent **(1 pt)**. On en déduit que $\text{pgcd}(a, b, c) = 7$ et que

$$7 = -57 \times \text{pgcd}(a, b) + 2 \times c = -57 \times (26 \times a + (-43) \times b) + 2 \times c = \\ -1482 \times a + 2451 \times b + 2 \times c.$$

Donc $x = -1482$, $y = 2451$ et $z = 2$ conviennent **(1 pt)**.

Exercice 4. La décomposition en facteurs premiers de 2008 est $2^3 \cdot 251$ **(1 pt)**. L'entier 251 est effectivement premier. S'il n'était pas premier, il serait divisible par un nombre premier < 16 car $16^2 = 256 > 251$. Or, 251 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Donc 251 est bien premier. D'après le cours, le nombre de diviseurs de 2008 et $2 \times (3 + 1) \times (1 + 1) = 16$ **(1 pt)**.

Exercice 5. On commence par décomposer le polynôme $X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$ en facteurs irréductibles. Faisons la substitution $Y = X^2$ et décomposons $Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 1$ en facteurs irréductibles. Comme 1 est une racine de ce dernier polynôme, on peut mettre $Y - 1$ en facteur :

$$Y^3 - 3Y^3 + 3Y - 1 = (Y - 1)(Y^2 - 2Y + 1) = (Y - 1)^3.$$

Du coup, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$ est

$$X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1 = (X^2 - 1)^3 = (X - 1)^3(X + 1)^3 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On a donc

$$F = \frac{2X^2 + 6}{(X - 1)^3(X + 1)^3}.$$

On constate que F a deux pôles. Ils sont tous les deux réels et de multiplicité 3.

Faisons la substitition $X = Y + 1$:

$$F = \frac{2Y^2 + 4Y + 8}{Y^3(Y + 2)^3} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $2Y^2 + 4Y + 8$ par $(Y + 2)^3$ à l'ordre 3. On obtient

$$2Y^2 + 4Y + 8 = (1 - Y + Y^2)(Y + 2)^3 + Y^3(-Y^2 - 5Y - 7) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Substituer dans l'expression de F ci-dessus, et simplifier donne

$$F = \frac{1}{Y} + \frac{-1}{Y^2} + \frac{1}{Y^3} + \frac{-Y^2 - 5Y - 7}{(Y + 2)^3}.$$

Ecrire $-Y^2 - 5Y - 7$ comme polynôme en $Y + 2$:

$$-Y^2 - 5Y - 7 = -(Y + 2)^2 - (Y + 2) - 1 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{Y} + \frac{-1}{Y^2} + \frac{1}{Y^3} + \frac{-(Y + 2)^2 - (Y + 2) - 1}{(Y + 2)^3} &= \\ \frac{1}{Y} + \frac{-1}{Y^2} + \frac{1}{Y^3} + \frac{-1}{Y + 2} + \frac{-1}{(Y + 2)^2} + \frac{-1}{(Y + 2)^3} &= \\ \frac{1}{X - 1} + \frac{-1}{(X - 1)^2} + \frac{1}{(X - 1)^3} + \frac{-1}{X + 1} + \frac{-1}{(X + 1)^2} + \frac{-1}{(X + 1)^3}&. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites extraites définies par $a_n = s_{2n+1}$ et $b_n = s_{2n}$. On montre que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Montrons que (a_n) est croissante. Or,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = s_{2n+3} - s_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{\ln(2n + 2)} + \frac{(-1)^{2n+3}}{\ln(2n + 3)} &= \\ \frac{1}{\ln(2n + 2)} - \frac{1}{\ln(2n + 3)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Du coup, ls suite (a_n) est bien croissante **(1 pt)**.

Puis, montrons que la suite (b_n) est décroissante. Or,

$$b_{n+1} - b_n = s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+1)} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\ln(2n+2)} = \frac{1}{\ln(2n+2)} - \frac{1}{\ln(2n+1)} \leq 0.$$

Du coup, ls suite (b_n) est bien décroissante **(1 pt)**.

Ensuite, montrons que $b_n \geq a_n$ pour tout $n \geq 1$. Or,

$$b_n - a_n = s_{2n} - s_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{\ln(2n+1)} = \frac{1}{\ln 2n + 1} \geq 0.$$

Cela montre bien que $b_n \geq a_n$ pour tout $n \geq 1$ **(1 pt)**.

Finalement, montrons que $b_n - a_n$ tend vers 0. Or,

$$b_n - a_n = \frac{1}{\ln(2n+1)} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$ **(1 pt)**.

Par conséquent, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et elles convergent et tendent vers une même limite ℓ. Comme la suite (s_n) est la réunion des deux suites (a_n) et (b_n), la suite (s_n) converge et tend vers ℓ.