Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 12 juin 2007, 8h30-11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

pour tout entier naturel n.

Exercice 2. a. Déterminer $d = \mathrm{pgcd}(1206, 2007)$.

b. Déterminer des entiers relatifs u, v tels que $1206u + 2007v = d$.

Exercice 3. Soit P le polynôme réel défini par $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

a. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c. Décomposer le polynôme $P(X^2)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Soient P et Q les polynômes réels définis par

$$P = X^5 + 2X^3 + X^2 - 1 \quad \text{et} \quad Q = X^4 + X^3 + 3X^2 + 3X + 3.$$

a. Déterminer $D = \mathrm{pgcd}(P, Q)$.

b. Les polynômes P et Q sont-ils premiers entre eux ?

c. Déterminer des polynômes réels U et V tels que $UP + VQ = D$.

Exercice 5. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle définie par

$$F = \frac{1}{(X^2-1)^3}$$

Décomposer F en éléments simples.

Exercice 6. Soit (s_n) la suite définie par

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite (s_n) diverge et tend vers $+\infty$. (On pourra utiliser que $x \geq \log(1+x)$ pour tout nombre réel x positif.)

T. S. V. P.

Barème indicatif sur 20 points :

Exercice 1	2 pt
Exercice 2	2 pt
Exercice 3	5 pt
Exercice 4	4 pt
Exercice 5	5 pt
Exercice 6	2 pt

T. S. V. P.