

Université de Bretagne Occidentale  
UFR Sciences et Techniques  
LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP  
ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 9 janvier 2007, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Exercice 1.** Déterminer  $\text{pgcd}(2007, 1814)$ .

**Exercice 2.** Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers positifs distincts. Soit  $s$  la somme des diviseurs positifs de  $p^2q^2$ . Montrer que  $s$  n'est pas premier.

**Exercice 3.** Soit  $P$  le polynôme défini par

$$P = 3X^5 + 5X^4 - 2X^3 + 6X^2 + 10X - 4.$$

- a. Déterminer les racines de  $P$  dans  $\mathbb{Q}$ .
- b. Déterminer les racines de  $P$  dans  $\mathbb{R}$ .
- c. Déterminer les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4.** Soient  $A$  et  $B$  les polynômes réels définis par

$$\begin{aligned} A &= 2X^5 - 2X^3 - 4X \\ B &= 2X^4 - 3X^2 - 2 \end{aligned}$$

- a. Déterminer  $D = \text{pgcd}(A, B)$  et des polynômes  $U, V \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$UA + VB = D.$$

- b. Quelles sont les racines communes de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}$  et pourquoi ?

**Exercice 5.** Soit  $P$  le polynôme complexe défini par

$$P = (X^2 + (i - 1)X + 7i + 4)(X + 2i + 1)(X - 3i - 2).$$

- a. Montrer que  $P \in \mathbb{R}[X]$ .
- b. Est-ce que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  ? Si oui, le démontrer. Sinon, déterminer des polynômes réels non constants  $A$  et  $B$  tels que  $P = AB$ .

**Exercice 6.** Soit  $F \in \mathbb{R}(X)$  la fraction rationnelle définie par

$$F = \frac{1}{X^3(X - 1)^3}$$

Décomposer  $F$  en éléments simples.

**T. S. V. P.**

**Barème indicatif sur 20 points :**

Exercice 1	1 pt
Exercice 2	3 pt
Exercice 3	5 pt
Exercice 4	4 pt
Exercice 5	3 pt
Exercice 6	4 pt

**T. S. V. P.**