Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal 2nd session, le 13 juin 2006, 9h00-12h00

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Soit c un plus grand diviseur commun de a et b. Alors, il existe des entiers relatifs u, v tels que

$$ua + vb = c. \quad \textbf{(2 pt)}$$

Exercice 1. a. On démontre l'énoncé par récurrence. Tout d'abord, pour $n = 1$: le premier membre est $a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ et le deuxième vaut $2 - \frac{1}{1} = 1$. Comme on a bien $1 \leq 1$, l'énoncé est bien vrai au rang 1 **(0,5 pt)**.

Supposons maintenant que l'énoncé est vérifié au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrons l'énoncé au rang $n+1$. Or, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq$$
$$\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} == 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leq$$
$$\leq 2 - \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Cela montre bien l'énoncé au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence, l'énoncé est démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$ **(1 pt)**.

b. Comme $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, on a $a_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'après le a. La suite (a_n) est donc majorée par 2 **(0,5 pt)**.

c. Comme $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geq a_n$, la suite (a_n) est bien croissante **(0,5 pt)**.

d. D'après le cours, toute suite croissante et majorée est convergente. Il résulte des b et c que la suite (a_n) est convergente **(0,5 pt)**.

Exercice 2. Comme

$$\frac{6+8i}{1+3i} = 3 - i \quad \text{et} \quad \frac{13+9i}{1+3i} = 4 - 3i,$$

l'équation $(1+3i)z^2-(6+8i)z+13+9i=0$ est équivalente à l'équation $z^2-(3-i)z+4-3i=0$ **(1 pt)**. Le discriminant de cette dernière est égal à

$$\Delta=(3-i)^2-4(4-3i)=-8+6i.$$

Une racine carrée de Δ est $\delta=1+3i$ **(1 pt)**. Les solutions de l'équation $z^2-(3-i)z+4-3i=0$ sont donc

$$\frac{(3-i)\pm(1+3i)}{2}=2+i,1-2i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 3. Effectuons l'algorithme d'Euclide étendu :

i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	u_i	v_i
-1					1	0
0					0	1
1	1309	455	2	399	1	-2
1	455	399	1	56	-1	3
2	399	56	7	7	8	-23
3	56	7	8	0		

On a donc $\mathrm{pgcd}(1309,455)=7$ **(2 pt)**, et

$$1309\times 8+455\times(-23)=7.$$

Donc $u=1309$ et $v=-23$ conviennent **(2 pt)**.

Exercice 4. Les racines complexe de X^8-1 sont $\pm 1,\pm i,\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{2}$ **(1 pt)**. D'où

$$\begin{aligned}X^8-1&=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\cdot\\ &\cdot(X-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2})(X-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2})(X+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2})(X-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2})=\\ &=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \quad \textbf{(1 pt)}.\end{aligned}$$

Comme ce derniers facteurs sont tous réels et irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, ils constituent la décomposition en facteurs irréductibles de X^8-1 dans $\mathbb{R}[X]$ **(1 pt)**.

Exercice 5. Soient $A=X^4-6X^3+11X^2-13X+6$ et $B=X^5-3X^4+2X^3$. On décompose B en facteurs irréductibles :

$$B=X^3(X^2-3X+2)=X^3(X-1)(X-2) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On effectue la division de A par X^2-3X+2 suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 et on trouve :

$$A=(X^2-2X+3)(X^2-3X+2)-X^3 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Par conséquent, la décomposition en éléments simples de $\frac{A}{B}$ est

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} = \frac{(X^2-2X+3)(X^2-3X+2)-X^3}{X^3(X^2-3X+2)} &= \\ = \frac{X^2-2X+3}{X^3} + \frac{-1}{X^2-3X+2} &= \\ = \frac{1}{X} + \frac{-2}{X^2} + \frac{3}{X^3} + \frac{-1}{(X-1)(X-2)} &= \\ = \frac{1}{X} + \frac{-2}{X^2} + \frac{3}{X^3} + \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X-2} & \quad \textbf{(2 pt)}.\end{aligned}$$