

Université de Bretagne Occidentale  
UFR Sciences et Techniques  
LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP  
ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal 2nd session, le 13 juin 2006, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Question de cours.** Enoncer le Théorème de Bézout pour les entiers relatifs.

**Exercice 1.** Soit  $(a_n)$  la suite réelle définie par

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- a. Montrer par récurrence que  $a_n \leq 2 - \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- b. En déduire que la suite  $(a_n)$  est majorée.
- c. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
- d. Montrer que la suite  $(a_n)$  est convergente.

**Exercice 2.** Résoudre l'équation  $(1 + 3i)z^2 - (6 + 8i)z + 13 + 9i = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 3.** Déterminer  $\text{pgcd}(1309, 455)$  et des entiers relatifs  $u, v$  tels que

$$1309u + 455v = \text{pgcd}(1309, 455).$$

**Exercice 4.** Décomposer le polynôme réel  $X^8 - 1$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 5.** Décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 13X + 6}{X^5 - 3X^4 + 2X^3}$$

en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

**Barème indicatif sur 20 points :**

Question de cours	2 pt
Exercice 1	4 pt
Exercice 2	3 pt
Exercice 3	4 pt
Exercice 4	3 pt
Exercice 5	4 pt