Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE ENTREE A, IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel mi-semestre de rattrapage, le 14 avril 2006
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$ **(1 pt)**. Il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $b = qa + r$ **(1 pt)**, où $0 \leq r < |a|$ **(1 pt)**. De plus, q et r sont uniquement déterminés par ces conditions **(1 pt)**.

Exercice 1. a. Soit $g = f \circ f$. On a $g(1) = 3$, $g(2) = 4$, $g(3) = 2$, $g(4) = 3$ **(1 pt)**.

b. Soit $h = f \circ f \circ f \circ f = g \circ g$. D'après le a, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 4$, $h(4) = 2$. Il vient que $h = f$ **(1 pt)**.

c. Non. Comme 1 n'est pas l'image par f d'un élément de E, on a, en particulier, $(f \circ f \circ f)(1) \neq 1$. Du coup $f \circ f \circ f \neq \mathrm{id}$ **(1 pt)**.

d. Non. L'application f n'est pas bijective car elle n'est pas injective. En effet, on a $f(1) = f(4)$ **(1 pt)**.

e. Comme $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$, on a $f(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$ **(1 pt)**.

f. On a $f(1), f(2), f(4) \in \{2, 3\}$ et $f(3) \notin \{2, 3\}$. Donc $f^{-1}(\{2, 3\}) = \{1, 2, 4\}$ **(1 pt)**.

Exercice 2. Lorsque $n = 0$, l'entier $2^{3^n} - 2 = 2^{3^0} - 2 = 2^1 - 2 = 0$ est bien divisible par 3 **(1 pt)**. Supposons que $2^{3^n} - 2$ est divisible par 3 pour un certain entier naturel n **(1 pt)**. Montrons que $2^{3^{n+1}} - 2$ est divisble par 3. Or,

$$
\begin{aligned}
2^{3^{n+1}} - 2 &= \left(2^{3^n}\right)^3 - 2 = \\
&\left(2^{3^n} - 2\right)^3 - 3 \times 2^{3^n \times 2} \times (-2) - 3 \times 2^{3^n} \times (-2)^2 - (-2)^3 - 2 = \\
&\qquad \left(2^{3^n} - 2\right)^3 + 3 \times 2^{3^n \times 2} \times 2 - 3 \times 2^{3^n} \times 2^4 + 6 \quad \textbf{(2 pt)}.
\end{aligned}
$$

Comme $2^{3^n} - 2$ est divisible par 3 par hypothèse, il s'ensuit que $2^{3^{n+1}} - 2$ est divisible par 3 **(1 pt)**.

Exercice 3. a. Calculons le module de $15 - 8i$:

$$|15 - 8i| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'après le cours, les racines carrées de $8 + 15i$ sont donc

$$\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} \right) = \pm (4 - i) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Le discriminant Δ est

$$\Delta = (2-3i)^2 + 4 \times (5+i) = 15 - 8i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'après le a, une racine carrée de Δ est donc $4-i$ Du coup, les solutions de l'équation sont

$$\frac{-(2-3i)+(4-i)}{2} = 1+i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

et

$$\frac{-(2-3i)-(4-i)}{2} = -3+2i \quad \textbf{(1 pt)}.$$