Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 10 janvier 2006, 9h00-12h00

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. (2 pt)

Exercice 1. On démontre l'énoncé par récurrence **(1 pt)**. Tout d'abord, pour $n = 0$, le premier membre $1^3 + \cdots + n^3$ est une somme de 0 termes, et est donc égale à 0. Le second membre $(\frac{1}{2}n(n+1))^2 = 0$ est aussi égal à 0. Donc l'assertion est bien vraie au rang 0 **(1 pt)**.

Supposons maintenant que l'énoncé est vérifié au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons l'énoncé au rang $n+1$. Or, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\tfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 =$$
$$(n+1)^2\left((\tfrac{1}{2}n)^2 + (n+1)\right) = (n+1)^2(\tfrac{1}{4}n^2 + n + 1) =$$
$$\tfrac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 =$$
$$\left(\tfrac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\right)^2 \quad \textbf{(2 pt)}.$$

Cela montre bien lénoncé au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, l'énoncé est démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Effectuons l'algorithme d'Euclide étendu :

i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	u_i	v_i
-1					1	0
0					0	1
1	729	295	2	139	1	-2
2	295	139	2	17	-2	5
3	139	17	8	3	17	-42
4	17	3	5	2	-87	215
5	3	2	1	1	104	-257

On a donc $\mathrm{pgcd}(729, 295) = 1$ **(2 pt)**, et

$$729 \times 104 + 295 \times (-257) = 1.$$

Donc $u = 104$ et $v = -257$ conviennent **(2 pt)**.

Exercice 3. Soit d un diviseur commun de a' et b'. On doit montrer que $d = \pm 1$. Comme d divise $a' = 5a + 8b$ et d divise $b' = 3a + 5b$, l'entier relatif d divise $5a' - 8b' = (25a + 40b) - (24a + 40b) = a$. De même, d divise $3a' - 5b' = (15a + 24b) - (15a + 25b) = -b$, et donc d divise b. Par conséquent, d est un diviseur commun de a et b. Comme a et b sont premiers entre eux, $d = \pm 1$ **(2 pt)**.

Exercice 4. Tout polynôme réel de degré ≥ 3 est réductible. Donc, P n'est pas irréductible **(1 pt)**. Pour trouver des polynômes non constants $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AB = P$, on suit la méthode générale bienqu'une méthode ad hoc soit plus rapide ici. On décompose P dans $\mathbb{C}[X]$ en facteurs linéaires. Pour cela, cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$. On veut donc résoudre $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On résoud d'abord $y^2 + 3y + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$, et ensuite $x^2 = y$. Les solutions de $y^2 + 3y + 1 = 0$ sont $y = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Comme ces deux nombres réels sont toues les deux strictement négatifs, les racines carrées de ces deux nombres complexes sont

$$\pm i\sqrt{\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

Du coup,

$$\begin{aligned} P = &\left(X - i\sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}\right)\left(X + i\sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}\right) \\ &\qquad\left(X - i\sqrt{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}\right)\left(X + i\sqrt{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}\right) = \\ &\qquad\qquad = \left(X^2 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(X^2 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

Donc $A = X^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $B = X^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ conviennent **(2 pt)**.

Exercice 5. Soit $A = 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 2X - 3$ et effectuons la division de A par $X^2 + 1$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} A &= -3(X^2 + 1) + X(2X^3 + 3X^2 + X + 2) = \\ &= (2X - 3)(X^2 + 1) + X^2(2X^2 + X + 1) = \\ &= (X^2 + 2X - 3)(X^2 + 1) + X^3(X + 1) \quad \textbf{(2 pt)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la décomposition en éléments simples est

$$\begin{aligned} \frac{A}{X^3(X^2+1)} &= \frac{(X^2 + 2X - 3)(X^2 + 1) + X^3(X + 1)}{X^3(X^2 + 1)} = \\ &= \frac{X^2 + 2X - 3}{X^3} + \frac{X + 1}{X^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{X} + \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X^3} + \frac{X + 1}{X^2 + 1} \quad \textbf{(2 pt)}. \end{aligned}$$