Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 10 janvier 2006, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer les Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$, où K est un corps.

Exercice 1. Montrer que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\tfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Déterminer $\mathrm{pgcd}(729, 295)$ et des entiers relatifs u, v tels que

$$729u + 295v = \mathrm{pgcd}(729, 295).$$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Soient a', b' les entiers relatifs définis par $a' = 5a + 8b$ et $b' = 3a + 5b$. Montrer que a' et b' sont premiers entre eux.

Exercice 4. Soit P le polynôme réel $X^4 + 3X^2 + 1$. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si oui, le montrer. Sinon, déterminer deux polynômes non constants $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AB = P$.

Exercice 5. Décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 2X - 3}{X^3\left(X^2+1\right)}$$

en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Barème indicatif sur 20 points :

Question de cours	2 pt
Exercice 1	4 pt
Exercice 2	4 pt
Exercice 3	3 pt
Exercice 4	3 pt
Exercice 5	4 pt