Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE ENTREE A, IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel mi-semestre, le 3 novembre 2005
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$ **(1 pt)**. Il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $b = qa + r$ **(1 pt)**, où $0 \leq r < |a|$ **(1 pt)**. De plus, q et r sont uniquement déterminés par ces conditions **(1 pt)**.

Exercice 1. a. Soit $(x, y) \in F$. Comme $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$, on a bien $(x, y)\, R\, (x, y)$. La relation R est donc réflexive **(1 pt)**. Soient $(x, y), (u, v)$ des éléments de F tels que $(x, y)\, R\, (u, v)$. Comme $(x^2 - y^2)^2 = (u^2 - v^2)^2$, on a aussi $(u^2 - v^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$, i.e., $(u, v)\, R\, (x, y)$. La relation R est donc aussi symétrique **(1 pt)**. Soient $(x, y), (u, v), (r, s) \in F$ avec $(x, y)\, R\, (u, v)$ et $(u, v)\, R\, (r, s)$. Comme $(x^2 - y^2)^2 = (u^2 - v^2)^2$ et $(u^2 - v^2)^2 = (r^2 - s^2)^2$, on a $(x^2 - y^2)^2 = (r^2 - s^2)^2$, i.e., $(x, y)\, R\, (r, s)$. Par conséquent, la relation R est transitive **(1 pt)**, et elle est une relation d'équivalence.

b. Un élément (x, y) de F est équivalent à $(0, 0)$ relativement à la relation R si et seulement si $(x^2 - y^2)^2 = (0^2 - 0^2)^2 = 0$. Donc, (x, y) est équivalent à $(0, 0)$ si et seulement si $y = \pm x$. Par conséquent, la classe d'équivalence de $(0, 0)$ est

$$\overline{(0,0)} = \{(-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (-2,2), (-1,1), (1,-1), (2,-2)\} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

c. Comme $(1, 0) \notin \overline{(0,0)}$, sa classe est une classe différente de la classe $\overline{(0,0)}$. Or,

$$\overline{(1,0)} = \{(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\}.$$

Comme $(2, 0) \notin \overline{(0,0)} \cup \overline{(1,0)}$, sa classe est une classe différente des classes $\overline{(0,0)}$ et $\overline{(1,0)}$. Or,

$$\overline{(2,0)} = \{(-2,0), (2,0), (0,-2), (0,2)\}.$$

Comme $(2, 1) \notin \overline{(0,0)} \cup \overline{(1,0)} \cup \overline{(2,0)}$, sa classe est encore une classe différente. Or,

$$\overline{(2,1)} = \{(-2,-1), (-2,1), (-1,-2), (-1,2), (1,-2), (1,2), (2,-1), (2,1)\}$$

Comme $F = \overline{(0,0)} \cup \overline{(1,0)} \cup \overline{(2,0)} \cup \overline{(2,1)}$, il n'y a pas d'autre classe **(1 pt)**. Comme elles sont 2-à-2 distinctes **(1 pt)**, F contient exactement 4 classes d'équivalence.

Exercice 2. Quand $n = 0$, on a $2^{n+2} = 2^2 = 4$ et $5^{2^n} - 1 = 5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$. Comme 4 divise 4, l'énoncé est bien vrai au rang 0 **(1 pt)**. Supposons, ensuite, que l'énoncé est vrai au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ **(1 pt)**. Montrons-le au rang $n+1$. Or,

$$5^{2^{n+1}} - 1 = 5^{2^n \times 2} - 1 = \left(5^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(5^{2^n} - 1\right) \times \left(5^{2^n} + 1\right) \quad \textbf{(2 pts)}.$$

Par hypothèse de récurrence, 2^{n+2} divise $5^{2^n} - 1$. Comme 5^{2^n} est impaire, $5^{2^n} + 1$ est paire, i.e., divisible par 2. Du coup, le produit $(5^{2^n} - 1) \times (5^{2^n} + 1)$ est divisible par $2^{n+2} \times 2 = 2^{n+3} = 2^{(n+1)+2}$ **(1 pt)**, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3. a. Calculons le module de $-12 + 5i$:

$$|-12 + 5i| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'après le cours, les racines carrées de $-12 + 5i$ sont

$$\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-12 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(12 + 13)} \right) = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{2} \right) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Le discriminant Δ est

$$\begin{aligned} \Delta &= (3 - 5i)^2 - 4 \times (1 - i) \times (6 - 4i) = \\ &= (-16 - 30i) - 4 \times (2 - 10i) = -24 + 10i = 2 \times (-12 + 5i) \quad \textbf{(1 pt)}. \end{aligned}$$

D'après le a, une racine carrée de Δ est donc

$$\delta = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{2} \right) = 1 + 5i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Du coup, les solutions de l'équation sont

$$\frac{(3 - 5i) + (1 + 5i)}{2 \times (1 - i)} = \frac{2}{1 - i} = 1 + i$$

et

$$\frac{(3 - 5i) - (1 + 5i)}{2 \times (1 - i)} = \frac{1 - 5i}{1 - i} = \frac{(1 - 5i)(1 + i)}{2} = 3 - 2i \quad \textbf{(1 pt)}.$$