

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE ENTREE A, IMP
ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel mi-semester, le 3 novembre 2005, 15h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Barème indicatif. Question de cours : **4 pts**, exercice 1 : **6 pts**, exercice 2 : **5 pts**, exercice 3 : **5 pts**

Question de cours. Énoncer le Théorème de la division euclidienne.

Exercice 1. Soit E l'ensemble d'entiers relatifs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et soit $F = E \times E$. Soit R la relation sur F définie par

$$(x, y) R(u, v) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 = (u^2 - v^2)^2$$

quels que soient (x, y) et $(u, v) \in F$.

- Montrer que R est une relation d'équivalence sur F .
- Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.
- L'ensemble F , combien de classes d'équivalence contient-il ? (Justifier la réponse.)

Exercice 2. Montrer par récurrence que l'entier 2^{n+2} divise l'entier $5^{2^n} - 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12 + 5i$.
b. Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$(1 - i)z^2 - (3 - 5i)z + (6 - 4i) = 0.$$