Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel, le 30 octobre 2004, 8h15–9h00
CORRIGE et BAREME INDICATIF

Exercice 1. Soit $\alpha = -\frac{5}{6} - 2i$. On a $|\alpha| = \sqrt{\frac{25}{36} + 4} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6}$ (**1 pt**). D'après le cours, les racines carrées de α sont alors

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6}+\frac{13}{6}\right)} + (-1)i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{6}\right)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ } (\mathbf{4\ pts}).$$

Donc les parties réelles des racines carrées de α sont $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ (**1 pt**) et les parties imaginaires des racines carrées de α sont $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (**1 pt**).

Exercice 2. a. Les racines 2004-ièmes de l'unité sont

$$\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{2004}} = e^{\frac{ik\pi}{1002}},$$

pour $k = 0, \ldots, 2003$ (**1 pt**). Pour $\ell = 0, \ldots, 1001$, et avec $k = 1002 + \ell$, on a

$$\xi_k = e^{\frac{ik\pi}{1002}} = e^{\frac{i(1002+\ell)\pi}{1002}} = e^{\frac{i1002\pi}{1002}} e^{\frac{i\ell\pi}{1002}} = -\xi_\ell \text{ } (\mathbf{1\ pt}).$$

D'où

$$\begin{aligned}\xi_0 + \cdots + \xi_{2003} &= (\xi_0 + \cdots + \xi_{1001}) + (\xi_{1002} + \cdots + \xi_{2003}) = \\ &= (\xi_0 + \cdots + \xi_{1001}) + (-\xi_0 - \cdots - \xi_{1001}) = 0 \text{ } (\mathbf{1\ pt}).\end{aligned}$$

b. On a

$$\xi_k^{-1} = e^{\frac{-ik\pi}{1002}} = e^{\frac{i(2004-k)\pi}{1002}} = \xi_{2004-k},$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, 2003\}$ (**1 pt**). D'où

$$\begin{aligned}\xi_0 \cdots \xi_{2003} &= \xi_0(\xi_1 \cdots \xi_{1001})\xi_{1002}(\xi_{1003} \cdots \xi_{2003}) = \\ &= 1(\xi_1 \cdots \xi_{1001})(-1)(\xi_{1001}^{-1} \cdots \xi_1^{-1}) = -1 \text{ } (\mathbf{2\ pts}).\end{aligned}$$

Question de cours. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que a divise bc (**1 pt**). Si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c (**1 pt**).

Démonstration. Comme a et b sont premiers entre eux (**1 pt**), il existe, d'après le Théorème de Bézout (**1 pt**), $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = 1$ (**1 pt**). Multiplier cette équation par c donne $uac + vbc = c$ (**1 pt**). Comme a divise uac et a divise vbc par hypothèse, a divise leur somme qui est égale à c (**1 pt**). $\square$