Université de Bretagne Occidentale
Département de Mathématiques
DEUG STU 2ème année

MATHEMATIQUES APPLIQUES

Examen terminal, 15 janvier 2004, 14h00–16h00

CORRIGE

Exercice 1. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Comme le discriminant Δ de l'équation caractéristique est égal à $(-2)^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$, la solution de l'équation différentielle est

$$y = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x),$$

où c_1, c_2 sont des constantes.

Exercice 2. a. Le développpement limité de e^x en $x = 0$ à l'ordre 5 est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

D'où le développement limité de e^{-x} en $x = 0$ à l'ordre 5

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Comme $\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, le développement limité de $\operatorname{sh}(x)$ en $x = 0$ à l'ordre 5 est

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

b. On réécrit l'expression dont on veut prendre la limite :

$$\frac{6\operatorname{sh}(x) - 6x - x^3}{x^5} = 6 \cdot \frac{\operatorname{sh}(x) - x - \frac{x^3}{6}}{x^5} =$$

$$= 6 \cdot \frac{\frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x^5} = 6(\tfrac{1}{120} + o(1)) = \tfrac{1}{20} + o(1).$$

D'où

$$\lim_{x \to 0} \frac{6\operatorname{sh}(x) - 6x - x^3}{x^5} = \tfrac{1}{20}.$$

Exercice 3. Soit $y \in \mathbb{R}^3$. On résoud l'"equation vectorielle $Ax = y$ en x. On a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & & & & & = & y_2 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & & & & & = & y_2 \\ & & & + & x_3 & = & -2y_1 + y_3 \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & & & \frac{1}{2}y_2 & & \\ x_2 & = & 3y_1 & & & - & y_3 \\ x_3 & = & -2y_1 & & & + & y_3 \end{array}\right.$$

Par conséquent, A est inversible et la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Le coefficient de corrélation linéaire est donné par la formule :

$$\begin{aligned} r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} \\ = \frac{10}{\sqrt{4}\sqrt{64}} &= \frac{10}{2.8} = \frac{10}{16} = 0,625 \end{aligned}$$

Exercice 5. a. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que f soit une fonction positve et que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Or pour tout $x \notin [-a, a]$, on a $f(x) = 0$ et si $x \in [-a, a]$, alors

$$f(x) = \tfrac{3}{4}(a^2 - x^2) = \tfrac{3}{4}(a - x)(a + x) \geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \tfrac{3}{4}\int_{-a}^{a} a^2 - x^2 dx = \tfrac{3}{4}\left[\frac{a^2x - x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \tfrac{3}{4}(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}) \\ &= a^3 \end{aligned}$$

Donc on doit avoir $a^3 = 1$ et $a = 1$.

b. L'espérance est donnée par la formule :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \tfrac{3}{4} \int_{-1}^{1} x - x^3 dx = \tfrac{3}{4} \left[\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{3}{4} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4})) = 0 \end{aligned}$$

La variance est donnée par la formule :

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} x^2 - x^4 dx = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{3}{4} (\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - (\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{5}(-1))) = \frac{3}{4} 2 \frac{5-3}{5.3} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$