Université de Bretagne Occidentale
Département de Mathématiques
DEUG MASS-MIAS 1ère année

ALGEBRE

Examen terminal, 6 janvier 2004, 10h15–12h15

CORRIGE et BAREME

Question de cours. (total : 3 pts)

a. Un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p. **(1 pt)**

b. Par l'absurde. Supposons qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. Dans ce cas, il existe un entier naturel n tel que $p_1, \ldots, p_n$ soient tous les nombres premiers. Soit

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Comme m est un entier ≥ 2, il existe un nombre premier divisant m. Donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que p_i divise m. Comme p_i divise également $p_1 \cdots p_n$, le nombre premier p_i divise la différence $m - p_1 \cdots p_n = 1$. Contradiction. **(2 pts)**

Exercice 1. (total : 5 pts)

a. **(3 pts)** Ecrire $-3-4i$ sous forme trigonométrique. Le module de $-3-4i$ est égal à $\sqrt{9+16} = 5$. Donc $-3-4i = 5(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où θ satisfait $\cos(\theta) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = -\frac{4}{5}$. Les racines carrées de $-3-4i$ sont alors

$$\sqrt{5}(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})) \quad \text{et} \quad -\sqrt{5}(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})).$$

Or, $\cos^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times -\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Comme $\cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$, $\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. De plus, $2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) = \sin(\theta) = -\frac{4}{5}$. D'où $\sin(\frac{\theta}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Par conséquent, les racines carrées de $-3-4i$ sont

$$\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{-2}{\sqrt{5}}) = 1 - 2i \quad \text{et} \quad -1 + 2i.$$

b. **(2 pts)** Le discriminant Δ de l'équation est

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3+i) = -3 - 4i.$$

D'après le a, les racines carrées de Δ sont $\pm(1-2i)$. D'où les solutions

$$\frac{3+(1-2i)}{2} = 2-i \quad \text{et} \quad \frac{3-(1-2i)}{2} = 1+i.$$

Exercice 2. (total : 5 pts)

a. **(3 pts)** Distinguer deux cas : n est pair ou n est impair.

Si n est pair, $n = 2m$ pour un certain entier relatif m. Dans ce cas $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Comme m^2 est encore un entier relatif, n^2 est divisible par 4, i.e., le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 0.

Si n est impair, $n = 2m+1$ pour un certain entier relatif m. Dans ce cas $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$. Comme m^2+m est un entier relatif, et $0 \leq 1 < 4$, l'écriture $n^2 = 4(m^2+m)+1$ est la division euclidienne de n^2 par 4. En particulier, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 1.

b. **(1 pt)** Comme $2003 = 4 \times 500 + 3$, le reste de la division euclidienne de 2003 par 4 est égal à 3. Comme $3 \neq 0, 1$, l'entier 2003 n'est pas le carré d'un entier relatif d'après le a.

c. **(1 pt)** Non, 2004 n'est pas le carré d'un entier relatif. Supposon, par l'absurde, que $2004 = n^2$, pour un certain entier relatif n. Comme 3 divise 2004, 3 divise n^2. Comme 3 est premier, 3 divise n et donc 3^2 divise n^2. Or, 9 ne divise pas 2004. Contradiction. Donc 2004 n'est pas le carré d'un entier relatif.

Exercice 3. (total : 4 pts) Dérouler l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X^2+X)(X^2-X+1)+(-X+1) \\ X^2+X &= (-X+1)(-X-2)+2 \qquad \textbf{(2 pts)}. \end{aligned}$$

Et en remontant on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2}(-X+1)(X+2)+\tfrac{1}{2}(X^2+X) = \\ &= \tfrac{1}{2}((X^4+1)-(X^2+X)(X^2-X+1))(X+2)+\tfrac{1}{2}(X^2+X) = \\ &= \tfrac{1}{2}(X^4+1)(X+2)+\tfrac{1}{2}(X^2+X)(-X^3-X^2+X-1). \end{aligned}$$

On pourra donc prendre

$$U(X) = \tfrac{1}{2}(X+2) \quad \text{et} V(X) = \tfrac{1}{2}(-X^3-X^2+X-1) \qquad \textbf{(2 pts)}.$$

Exercice 4. (total : 3 pts) Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles

$$X^3 - X = X(X-1)(X+1) \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Donc, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{4X^2 + X - 2}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}.$$

Multiplier par X et substituer $X = 0$ donnent $a = 2$. Multiplier par $X - 1$ et substituer $X = 1$ donnent $b = \frac{3}{2}$. Multiplier par $X + 1$ et substituer $X = -1$ donnent $c = \frac{1}{2}$. D'où la décomposition en éléments simples

$$\frac{4X^2 + X - 2}{X^3 - X} = \frac{2}{X} + \frac{\frac{3}{2}}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1} \qquad \textbf{(2 pts)}.$$