

Université de Bretagne Occidentale  
Département de Mathématiques  
DEUG MASS-MIAS 1ère année

## ALGÈBRE

Examen terminal, 16 juin 2004, 10h00–12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Question de cours.** a. Donner la définition d'un polynôme irréductible.  
b. Démontrer qu'il y a une infinité de polynômes irréductibles.

**Exercice 1.** a. Déterminer les racines carrées de  $-15 + 8i$ .  
b. Déterminer tous les nombres complexes  $z$  qui satisfont

$$2z^2 + z + 2 - i = 0.$$

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier relatif. Montrer que  $n^3 - n$  est divisible par 3.

**Exercice 3.** Déterminer des polynômes réels  $U(X)$  et  $V(X)$  tels que

$$(X^4 + X)U(X) + (X^2 + 1)V(X) = 1.$$

**Exercice 4.** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{6X^2 - 20X + 16}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}.$$