

Epreuve sans document ni calculatrice  
Les exercices sont indépendants

**Question de cours** Soient  $n_1$  et  $n_2$  deux nombres entiers naturels non nuls.

1. Que signifie “ $n_1$  et  $n_2$  sont premiers entre eux” ?
2. On suppose que  $n_1$  et  $n_2$  sont premiers entre eux. Énoncer le théorème de Bezout pour  $n_1$  et  $n_2$ .

**Exercice 1** Soit  $P(X) = X^6 + X^3 + 1$ .

1. Déterminer toutes les racines réelles ou complexes du polynôme  $P$ .
2. En déduire la factorisation de  $P$  en polynômes premiers dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 2** Montrer que, quel que soit l'entier  $m \geq 1$ , les polynômes  $X^{2m} + X + 1$  et  $X^3 + X$  sont premiers entre eux.

**Exercice 3** Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles suivantes :

$$R_1(X) = \frac{X + 4}{X^2 - X - 2} \quad \text{et} \quad R_2(X) = \frac{X + 2}{X^3 - X^2 + 2X - 2}.$$

**Exercice 4** Démontrer qu'il n'existe pas d'entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  tel que le nombre réel  $\sqrt{n^2 + 6}$  soit en fait un nombre rationnel.