Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Examen terminal, 2ème session, le 21 juin 2002, 10h–12h

Documents et calculatrices non autorisés. Justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Soient V et W les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - y = 0 \text{ et } z + t = 0 \right\}$$

et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0 \right\}$$

a. Déterminer $\dim(V)$ et $\dim(W)$.
b. Déterminer $\dim(V \cap W)$.
c. Déterminer $\dim(V + W)$ et une base de $V + W$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $F\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme satisfaisant

$$F(1) = 1 + X - X^2$$
$$F(X) = 1 - X - 5X^2$$
$$F(X^2) = 2 + 3X.$$

a. Déterminer la matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$.
b. Déterminer une base de $\ker(F)$.
c. Déterminer une base de $\operatorname{im}(F)$.
d. Quel est le rang de M ?
e. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (X + X^2, 1 + 2X^2, 2 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
f. Déterminer la matrice de passage du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
g. Déterminer la matrice de passage du changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
h. Déterminer la matrice M' de F dans la base $\mathcal{B}'$.
i. Quel est le rang de M' ?

Tourner S.V.P.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f\colon V \to V$ un endomorphisme de V tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_V$.

a. Montrer que f est un automorphisme de V.
b. Supposons que V contienne un vecteur non nul v_1. Montrer que la famille $v_1, f(v_1)$ est libre.
c. Supposons que V contienne un vecteur v_2 qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(v_1, f(v_1))$. Montrer que la famille $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)$ est libre.
d. Montrer que V est de dimension paire.

Tourner S.V.P.