Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Contrôle, le 16 février 2002, 8h–10h

Documents et calculatrices non autorisés. Justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & a^2y & + & z & = & a \\ ax & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

en x, y, z quelle que soit la valeur de a.

Exercice 2. Soient P_1, P_2, P_3, P_4 des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$\begin{aligned} P_1 &= X^2 + 2X - 3, \\ P_2 &= X^2 - X + 2, \\ P_3 &= X^2 + 1 \quad \text{et} \\ P_4 &= X - 2. \end{aligned}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille P_1, P_2, P_3, P_4.

a. La famille P_1, P_2, P_3, P_4 est-elle libre?
b. Extraire de la famille P_1, P_2, P_3, P_4 une base de F.

Exercice 3. On définit deux sous-espaces vectoriels F_1, F_2 de $\mathbb{R}^4$ par

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x - 2y + z - t = 0, \\ x + 2y + t = 0 \quad \text{et} \\ -x - z + 2t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{et}$$

$$F_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a. A-t-on $F_2 \subseteq F_1$?
b. Déterminer une famille génératrice de F_1.
c. Montrer que $F_1 \subseteq F_2$.