Université de Rennes 1
DEUG Sciences & Technologie
1ère année

MA3-Mathématiques

Examen Terminal, 2ème session, le 6 septembre 1999, 8h–10h

CORRIGE

Exercice 1. a. Par définition de la matrice d'un endomorphisme, $f(e_1) = u$, $f(e_2) = u$, ..., $f(e_n) = u$. D'où $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(u)$.

b. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(u)) = 1$ car $u \neq 0$. D'après le Théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = n - 1$.

c. On a bien $e'_k \in \ker(f)$ car $f(e'_k) = f(e_k - e_n) = f(e_k) - f(e_n) = u - u = 0$. Montrons que la famille $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda'_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e'_{n-1} = 0$. On en déduit que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + (-\lambda_1 - \cdots - \lambda_{n-1}) e_n = 0.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E. D'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Par conséquent, la famille $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ est libre. D'après le b, $\dim(\ker(f)) = n-1$. Donc la famille est également génératrice de $\ker(f)$.

d. Comme $f(u) \neq 0$, la famille $(e'_1, \dots, e'_{n-1}, u)$ engendre un sous-espace vectoriel de E qui contient $\ker(f)$ strictement. En particulier, sa dimension est au moins n. Comme E est de dimension n, il vient que $\mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_{n-1}, u) = E$. La famille $(e'_1, \dots, e'_{n-1}, u)$ est donc génératrice de E. Comme son cardinal est égal à la dimension de E, c'est une base $\mathcal{B}'$ de E. Comme $f(e'_k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n-1$ et comme $f(u) = nu$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est égale à A'.

e. $(A')^2 = nA'$. On montre facilement par récurrence que $(A')^i = n^{i-1}A$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$. Soit P la matrice du passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $A' = P^{-1}AP$. D'où $A = PA'P^{-1}$ et

$$A^i = P(A')^i P^{-1} = Pn^{i-1}A'P^{-1} = n^{i-1}PA'P^{-1} = n^{i-1}A$$

quel que soit $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

f. $M^2 = (A - rI)(A - rI) = A(A - rI) - rI(A - rI) = A^2 - rA - rA + r^2 I = A^2 - 2rA + r^2 I = nA - 2rA + r^2 I = (n - 2r)A + r^2 I = (n - 2r)(M + rI) + r^2 I = (n - 2r)M + r(n - r)I.$

g. Supposons que $r \neq 0$ et que $r \neq n$. Dans ce cas, $r(n-r) \neq 0$ et

$$\frac{1}{r(n-r)}(M-(n-2r)I)\cdot M = \frac{1}{r(n-r)}(M^2-(n-2r)M) = I,$$

d'après le f. D'après le cours, M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{r(n-r)}(M-(n-2r)I).$$

Exercice 2. a. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, elle est génératrice de E. En particulier, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

b. On a $v_4 = f(e_4) = f(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3) = \alpha_1 f(e_1)+\alpha_2 f(e_2)+\alpha_3 f(e_3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

c. Supposons donc que $v_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, il existe une application linéaire $f\colon E \to F$ telle que $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$ et $f(e_3) = v_3$. Or, comme $e_4 = \alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3$, f vérifie également $f(e_4) = f(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3) = \alpha_1 f(e_1)+\alpha_2 f(e_2)+\alpha_3 f(e_3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v_4$.

Exercice 3. a. Montrons que $L(f+g) = L(f) + L(g)$ quelles que soient $f, g \in C^0(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(L(f+g))(x) = (2+\cos(x)+\sin(x))\cdot(f+g)(x) = (2+\cos(x)+\sin(x))\cdot(f(x)+g(x)) = (2+\cos(x)+\sin(x))f(x)+(2+\cos(x)+\sin(x))g(x) = (L(f))(x) + (L(g))(x) = (L(f)+L(g))(x)$. D'où $L(f+g) = L(f)+L(g)$. De même, on montre que $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ quels que soient $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Soit $g \in C^0(\mathbb{R})$. Comme $2+\cos(x)+\sin(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut définir une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ par

$$f(x) = \frac{g(x)}{2+\cos(x)+\sin(x)}.$$

On a alors $L(f) = g$. Cela montre que L est surjective.

c. Supposons que $L(f) = 0$. Cela veut dire que $(2+\cos(x)+\sin(x))f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $2+\cos(x)+\sin(x) \neq 0$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e., $f = 0$. Donc L est injective.

d. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda s + \mu t = 0$. Cela veut dire que $\lambda + \mu(\cos(x)+\sin(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$ on obtient $\lambda + \mu = 0$ et pour $x = -\frac{\pi}{4}$, on obtient $\lambda = 0$. D'où $\lambda = \mu = 0$ et la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme elle est génératrice de E par définition de E, c'est une base de E.

e. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda s + \mu t + \nu u = 0$. cela veut dire que $\lambda + \mu(\cos(x) + \sin(x)) + \nu \sin(2x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 0$ on obtient $\lambda + \mu = 0$, pour $x = -\frac{\pi}{4}$ on obtient $\lambda - \nu = 0$, et pour $x = \frac{\pi}{4}$ on obtient $\lambda + \mu\sqrt{2} + \nu = 0$. On en déduit que $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille $\mathcal{C}$ est donc libre. Comme elle est génératrice de F par définition de F, elle est une base de F.

f. Comme $L(s) = 2s + t \in F$ et $L(t) = s + 2t + u \in F$, $L(E) = L(\mathrm{Vect}(s,t)) = \mathrm{Vect}(L(s), L(t)) \subseteq F$.

g.

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(L') = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

h. Le rang de la matrice est égale à 2. D'où $\mathrm{rg}(L') = 2$. D'après le Théorème du rang, $\dim(\ker(L')) = 2 - 2 = 0$.

i. Comme $\mathrm{rg}(L') = 2 < 3 = \dim(F)$, L' n'est pas surjective. Comme $\ker(L')$ est de dimension 0, L' est injective.