Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Examen terminal, le 3 mai 2002, 10h–12h

CORRIGE

Exercice 1. a. On effectue la méthode de Gauss sur les lignes de la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc A est de rang 3.

b. Comme A est une matrice 3×3 de rang maximum, A est inversible.

c. On effectue la méthode de Gauss sur les lignes de la matrice A augmentée de la matrice identité I_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. a. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} F(P+Q) &= (P+Q) + (P+Q)' + (P+Q)(0)X + \tfrac{1}{6}(P+Q)''(0)X^3 = \\ &= P + P' + P(0)X + \tfrac{1}{6}P''(0)X^3 + \\ &\qquad + Q + Q' + Q(0)X + \tfrac{1}{6}Q''(0)X^3 = \\ &= F(P) + F(Q). \end{aligned}$$

Soit de plus $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F(\lambda \cdot P) &= \lambda \cdot P + (\lambda \cdot P)' + (\lambda \cdot P)(0) \cdot X + \tfrac{1}{6}(\lambda \cdot P)''(0) \cdot X^3 = \\ &= \lambda \cdot (P + P' + P(0) \cdot X + \tfrac{1}{6}P''(0) \cdot X^3) = \\ &= \lambda \cdot F(P). \end{aligned}$$

Par conséquent, F est linéaire.

b. On a

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ F(X) &= 1 \cdot X + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ F(X^2) &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 + \tfrac{1}{3}X^3 \\ F(X^3) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 3 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice de $F \circ F$ dans la base $\mathcal{B}$ est M^2, et

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

d. L'équation vectorielle $Mx = 0$ a comme solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 = -x_2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le vecteur $(1, -1, 0, 0)$ est une base de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $1 - X$ est une base de $\ker(F)$.

e. Une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de M est la famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la famille

$$1+X,\ 2X+X^2+\tfrac{1}{3}X^3,\ 3X^2+X^3$$

est une base de $\mathrm{im}(F)$.

f. On a

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
X+1 &= 1\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
(X+1)^2 &= 1\cdot 1 + 2\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
(X+1)^3 &= 1\cdot 1 + 3\cdot X + 3\cdot X^2 + 1\cdot X^3.
\end{aligned}$$

Donc la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est la matrice $Q = P^{-1}$. Après un calcul, on trouve

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

h. Par la formule du changement de base, $M' = QMP$. Après un calcul, on trouve

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -2\\ 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Montrons d'abord que $\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)=\{0\}$. Soit $v\in\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)$. Comme $v\in\mathrm{im}(f)$, il existe $w\in V$ tel que $f(w)=v$. Comme $v\in\ker(f)$, $f(v)=0$. Par conséquent, $f^2(w)=f(f(w))=f(v)=0$. En particulier, $f^3(w)=f(f^2(w))=f(0)=0$. Comme $f^3=f$, on a $v=f(w)=0$. Cela montre que $\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)=\{0\}$.

D'après le Théorème du rang,

$$\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{im}(f))=\dim(V).$$

Donc, d'après la relation de Grassmann,

$$\begin{aligned}\dim(\ker(f)+\operatorname{im}(f)) &= \dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{im}(f))-\dim(\ker(f)\cap\operatorname{im}(f)) = \\ &= \dim(V)-0= \\ &= \dim(V).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\ker(f)+\operatorname{im}(f)=V$. Par conséquent, $V=\ker(f)\oplus\operatorname{im}(f)$.